Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 4 02.11.2016

Präsenzaufgaben

1.) Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2.) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Raumdiagonalen eines Würfels und den Kanten.

3.) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

4.) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$ für die Vektoren

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie außerdem für die Teile a) und b) $\vec{b} \times \vec{a}$, $\vec{-b} \times \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{a}$, $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle$, $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$. In welche Richtung zeigt der letzte Vektor?

5.) Zeigen Sie, dass das Volumen eines Tetraeders, der von drei nicht in einer Ebene liegenden Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, durch

$$V = \tfrac{1}{6} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$$

gegeben ist.

Hausaufgaben (Abgabe bis 08.11.2016)

6.) Zeigen Sie: In einem Dreieck mit den Seiten $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt der Kosinussatz:

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\gamma),$$

wobei γ der Innenwinkel des Dreiecks zwischen den durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellten Seiten ist.

7.) Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{a}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind gegeben durch

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a}_{n+1} = (\vec{a}_n \times \vec{b}) \times \vec{b}$$

Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$, gebe eine explizite Formel für $\vec{a}_n$ an und beweise sie durch vollständige Induktion.

8.) Erweitern Sie die Klasse `VectorRn` aus den letzten Hausaufgaben um die beiden Methoden

```
public static double getWinkel (VectorRn v1, VectorRn v2)
```

und

```
public static VectorRn projiziereV1AufV2 (VectorRn v1, VectorRn v2).
```

Die Methode `getWinkel` soll den Winkel zwischen den beiden Vektoren `v1` und `v2` (im Bogenmaß) berechnen und zurückgeben. Die Methode `projiziereV1AufV2` soll die orthogonale Projektion des Vektors `v1` auf den Vektor `v2` zurückgegeben, ohne `v1` und `v2` zu verändern.
Werfen Sie wieder Exceptions, wenn die aufgerufene Operation nicht durchführbar ist.

Betrachten Sie die folgenden Testfälle:
$\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\vec{b} = (5, 6, 7, 8)^T$, $\vec{c} = (5, 2)^T$, $\vec{d} = (-2, 5)^T$

Eingabe	Ausgabe
$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$	0.25019592042251176
$\measuredangle(\vec{c}, \vec{d})$	1.5707963267948966 bzw. $90.0°$
Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{d}$	$(0, 0)^T$