Übungsblatt 7

23.11.2016

Präsenzaufgaben

- 1.) Bezogen auf ein Koordinatensystem mit einem Flughafen im Ursprung verlaufen die Bahnen zweier Flugzeuge auf den Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, wie nah sich die Flugzeuge im ungünstigsten Fall kommen können. Bestimmen Sie weiterhin die Lotfußpunkte der beiden Geraden.

- 2.) (a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punkts $P = (1; 8; 9)$ zur Ebene

$$E : -x + 2y + 2z = -3$$

- (b) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $P = (-1; 1; 2)$ zur Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- 3.) Untersuchen Sie **mit Hilfe einer Determinanten**, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im $\mathbb{R}^3$ besitzen:

- (a)

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4.) Gegeben ist die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie den kürzesten Abstand zu dem Punkt $P = (0; 0; 0)$, den entsprechenden Lotfußpunkt (der Punkt auf der Ebene mit dem kürzesten Abstand) und den Punkt, der sich durch Spiegelung von P an der Ebene ergibt.

5.) Gegeben ist die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie den kürzesten Abstand zur Geraden g .

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine Gerade h , die zur Ebene E parallel verläuft und den Abstand $d = 10$ hat.

Hausaufgaben (Abgabe bis 29.11.2016)

- 6.) **Typische IHK-Aufgabe.** Ein Flugzeug benötigt bei Gegenwind bis zum Abheben 500 m und startet dann in Richtung (3; 1). Bei Rückenwind hebt das Flugzeug erst nach 750 m ab und startet in Richtung (4; 1). Am Ende der 1 km langen Startbahn steht ein 10 m hoher Beleuchtungsmast. Wie groß ist der Mindestabstand des Mastes zu der Flugbahn bei Gegen- bzw. Rückenwind?

- 7.) (a) Bestimmen Sie zwei senkrechte Ebenen E_1, E_2 , deren Schnittmenge die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

bildet.

- (b) Geben Sie eine in der Ebene E_1 liegende Gerade durch den Punkt $P = (2|2|6)$ an (nicht die Schnittgerade).
(c) Geben Sie eine zu g senkrecht verlaufende Gerade durch den Punkt $P = (2|2|6)$ an.
(d) Berechnen Sie die Abstände von g bzw. den Ebenen E_1, E_2 zum Nullpunkt.

- 8.) Vereinfachen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten so weit wie möglich:

- (a) $\det(\alpha\vec{a}, \alpha\vec{b}, \alpha\vec{c})$
(b) $\det(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c})$
(c) $\det(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{c})$

- 9.) Durch 3 Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ soll eine Kurve der Form

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3$$

gelegt werden. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf und untersuchen Sie, in welchem der beiden folgenden Fälle die Lösung eindeutig ist.

- (a) $(x_0, y_0) = (-1, 0), (x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (2, 6)$
(b) $(x_0, y_0) = (-1, -1), (x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (1, 1)$

Tipp: Benutzen Sie die Determinatenregeln.