Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 8 — 30.11.2016

Präsenzaufgaben

1.) Bilden Sie eine Gruppe aus nur zwei Elementen 0 und 1. Dabei soll 0 das neutrale Element sein. Welche Ergebnisse müssen die 4 Operationen

$$\begin{array}{ccc} 0 & \circ & 0 \\ 0 & \circ & 1 \\ 1 & \circ & 0 \\ 1 & \circ & 1 \end{array}$$

haben? Begründen Sie die Ergebnisse mit den Gruppenaxiomen.

2.) Auf der Menge der Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist die folgende Abbildung definiert:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Hat diese Verknüpfung ein neutrales Element?
Für welche Elemente $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ hat diese Verknüpfung ein inverses Element?
Gibt es eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$, die bzgl. dieser Verknüpfung eine (evtl. nicht kommutative) Gruppe bildet?

3.) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 8 \\ 2x - \ \ y - 2z &= -1 \\ 3x + \ \ y + \alpha z &= 11 \end{aligned}$$

keine eindeutige Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?

4.) **Typische IHK-Aufgabe.** In einem Berghang steht ein 20 Meter hoher Turm mit einem Funksender auf der Spitze, dessen Reichweite in alle Richtungen 100 Meter beträgt. Der Berghang hat eine gleichmäßige Steigung von 100 % (entspricht $45°$ zur horizontalen Fläche) und ist ein Südhang, d.h. die Talsohle liegt im Süden, der Gipfel im Norden.

(a) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung zwischen Sender und Berghang.

(b) Berechnen Sie für jede der vier Himmelsrichtungen den Punkt, an dem man den Sender gerade noch empfangen kann.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!

Hausaufgaben (Abgabe bis 06.12.2016)

5.) Bei welchem der folgenden Systeme handelt es sich um eine Gruppe?

(a) G ist die Menge der von 1 verschiedenen reellen Zahlen mit der Verknüpfung $x \circ y := x + y - xy$.
Tipp: Überprüfen Sie für die Abgeschlossenheit, wann $x \circ y = 1$ gilt.

(b) G ist die Menge der von 0 verschiedenen rationalen Zahlen mit der Division als Verknüpfung.

6.) Bilden für eine natürliche Zahl $m > 1$ die Werte $\{0, 1, \ldots, m - 1\}$ zusammen mit der Operation

$$a \circ b = (a + b) \text{ mod } m$$

eine Gruppe?

7.) Zeigen Sie, dass die dreidimensionalen Vektoren mit der Addition und dem Vektorprodukt keinen Körper bilden.