Benno Willemsen,Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 9 07.12.2016

Präsenzaufgaben

1.) Verifizieren Sie, dass die Menge $\mathbb{R}^+$ aller echt positiven reellen Zahlen mit den Verknüpfungen $x \oplus y := xy$ und $\lambda \odot x := x^\lambda, x, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, ein reeller Vektorraum ist.

2.) Stellen Sie fest, ob

$$X = \{f; f \in C[a,b]; f(a) = 0\}$$

ein Untervektorraum (bzw. linearer Teilraum) von $C[a,b]$ (dem Vektorraum der im Intervall $[a,b]$ definierten reellen stetigen Funktionen) ist.

3.) Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Form hat die Lineare Hülle der beiden Vektoren?
Stellen Sie die Lineare Hülle in Normalenform und in Parameterform dar.

4.) Bildet die Menge $\mathbb{R}^3$ bzgl. der folgenden Verknüpfungen einen Vektorraum?

(a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \cdot x_1 \\ 2\alpha \cdot x_2 \\ 2\alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$

Hausaufgaben (Abgabe bis 13.12.2016)

5.) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Auf der Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, \ldots)$ mit Elementen $a_i \in K, \forall i \in \mathbb{N}$, sei eine Addition

$$\oplus : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, ((a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}}) \longmapsto (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

und eine Skalarmultiplikation

$$\circ : K \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, (k, (a_i)_{i\in\mathbb{N}}) \longmapsto k \circ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (k \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

definiert.

Zeigen Sie mit den Vektorraumaxiomen, dass $\mathcal{F}$ ein K-Vektorraum ist.

6.) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$. Sind U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

$$U_1 = \{\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = 0\}$$

$$U_2 = \{\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = 1\}$$

7.) Schreiben Sie das Polynom $v(t) = t^2 + 4t - 3$ auf $\mathbb{R}$ als eine Linearkombination der Polynome $e_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $e_2(t) = 2t^2 - 3t$ und $e_3(t) = t + 3$.