Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 10 13.12.2017

Präsenzaufgaben

1.) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren in $C[-\infty, \infty]$ linear unabhängig sind:

(a) $f_1(x) = 6,\quad f_2(x) = 3 \cdot \sin x,\quad f_3(x) = 2 \cdot \cos x$

(b) $f_1(x) = (3-x)^2,\quad f_2(x) = x^2 + 6x,\quad f_3(x) = 5$

(c) $f_1(x) = e^{2x},\quad f_2(x) = x^2,\quad f_3(x) = x$

2.) Stellen Sie (möglichst einfach) fest, ob folgende Mengen von Vektoren ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis im $\mathbb{R}^n$ bilden. Stellen Sie ggf. fest, ob es eine Teilmenge der Vektoren gibt, die eine Basis bildet. Geben Sie jeweils die Dimension des aufgespannten Unterraums an.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3.) Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_1, f_2, f_3\}$ der reellen Funktionen genau dann linear unabhängig ist, wenn $\{f_1, f_1 + f_2, f_3\}$ linear unabhängig ist.

4.) Schreiben Sie das Polynom $v(t) = t^2 + 4t - 3$ auf $\mathbb{R}$ als eine Linearkombination der Polynome $e_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $e_2(t) = 2t^2 - 3t$ und $e_3(t) = t + 3$.

5.) (a) Zeigen Sie, dass die 3 Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Weiter sind die 3 Vektoren $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ gegeben:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie jeden der 3 Vektoren aus des Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ so gegen einen Vektor aus der Menge $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ aus, dass wieder eine Basis im $\mathbb{R}^3$ entsteht.

Hinweis: Dabei soll jeweils aus der Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ genau ein Vektor ausgetauscht werden.

6.) Es sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis eines 2-dimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraums V. Man untersuche, für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ auch die beiden Vektoren $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ eine Basis von V bilden.

Hausaufgaben (Abgabe bis 19.12.2017)

7.) Bestimmen Sie $dim(L(a,b,c))$ in Abhängigkeit von $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.) Sind folgende Funktionsmengen auf dem Intervall $[-2; 2]$ linear unabhängig?

$$M_1 = \{\sinh(x), e^x, e^{2-x}\} \qquad M_2 = \{\sinh(x), e^x, e^{-2x}\}$$

9.) $M = \{f, g, h, i\}$ sei eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum V mit $dim(V) \geq 4$. Wie muss α gewählt werden, damit $\{f + g, g + h, h + i, i + \alpha \cdot f\}$ linear unabhängig sind?