

Übungsblatt 6

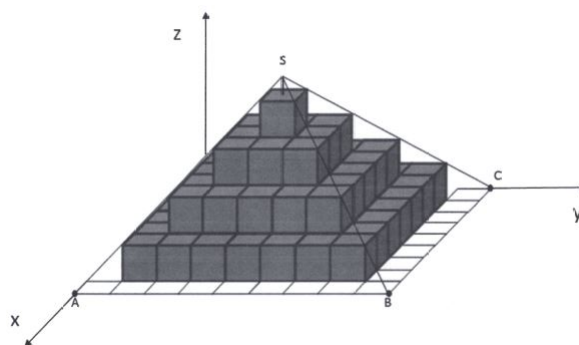
7.5.2018

Präsenzaufgaben

- 1.) Bestimmen Sie das Bild, den Rang, den Kern und die Dimension des Kerns der Abbildung $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2.) Aus Würfeln der Kantenlänge $0.4m$ ist bei einem Volksfest eine Pyramide zum Klettern aufgebaut worden (siehe Abbildung). Zum Schutz gegen Regen werden vier Dreiecksplanen benötigt, die jeweils eine Seite abdecken. Hierzu wird mittig auf dem obersten Würfel eine $0.2m$ hohe Stange befestigt.



Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die Unterseite der Pyramide der xy -Ebene und der Ursprung des Koordinatensystems mit dem nicht sichtbaren Endpunkt D der vierten Abspannseils übereinstimmt.

- Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S der Stange auf dem obersten Würfel.
- Beschreiben Sie das Abspannseil von der Spitze der Pyramide zum Punkt B in Form einer Geraden in Parameterform.
- Berechnen Sie die Gesamtfläche der vier Dreiecksplanen.
- Geben Sie nachvollziehbar die Gleichung der Ebene durch die Punkte S, B, C in Normalenform an.
- Welchen Winkel schließen die Dreiecksplanen jeweils mit der xy -Ebene ein?

3.) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck $\lambda\vec{x}$ kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

(a) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$

(b) $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda\vec{x}$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen? Im Fall a) kann damit die Multiplikation eines Vektors mit einem Faktor als Matrixmultiplikation interpretiert werden.

4.) Gegeben sei

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

B sei die im Uhrzeigersinn um 45° gedrehte Basis

(a) Bestimmen Sie die Basisvektoren von B .

(b) Berechnen Sie jeweils die Koordinaten des Vektors $(4, 5)^T$ bezüglich der Basen A und B .

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen, die die Koordinaten bezüglich A in Koordinaten bezüglich B umrechnen beziehungsweise umgekehrt. Verifizieren Sie die Richtigkeit mit Hilfe des Beispiels aus b)

5.) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x - y + t \cdot z = 9, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie für diese Fälle jeweils den Abstand der Geraden von der Ebene E .

Hausaufgaben (Abgabe bis 13.05.2018)

6.) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -2 & 1 \\ -17 & 9 & -6 & 117 \\ 4 & 2 & -8 & 38 \\ 3 & 17 & 34 & -217 \end{pmatrix}$$

unter der Annahme, dass die Determinanten der folgenden Matrizen bekannt sind,

$$B = \begin{pmatrix} 17 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 38 & -4 & 3 \\ -17 & 117 & -3 & 4 \\ 3 & -217 & 17 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 17 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 & 38 \\ -17 & 5 & -3 & 117 \\ 3 & 0 & 17 & -217 \end{pmatrix}$$

wobei $\det(B) = x$ und $\det(C) = y$.

7.) Es sei f eine lineare Abbildung mit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In der Definition von f sind die Koordinaten bzgl. der Einheitsbasis angegeben.

(a) Geben Sie die zu f gehörende Abbildungsmatrix M_A^A an. Wählen Sie die Basis A so, dass M_A^A eine Diagonalmatrix ist.

(b) Es sei $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
Geben Sie M_B^A, M_B^B und M_A^B an.

8.) Es sei $S(x)$ eine Spiegelung an der Ebene $\langle n, x \rangle = 0$ mit $\|n\| = 1$. Dann gilt $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, S(x) = x - 2 \langle x, n \rangle n$.

(a) Bezüglich der Einheitsmatrix im Definitions- und Wertebereich, zeigen Sie: $S(x) = M \cdot x$ mit $M = E - 2 \cdot n \cdot n^T$. E bezeichnet die Einheitsmatrix. Allgemein gilt für $x \in \mathbb{R}^3 : E \cdot x = x$.

(b) Bestimmen Sie für $n = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Inverse Matrix M^{-1} zu M bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \text{ im Definitions- und Wertebereich.}$$