

Übungsblatt 9

28.11.2018

Präsenzaufgaben

1.) Bestimmen Sie folgende Determinanten. Geben Sie jeweils ihren Rechenweg an.

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ a & b & c \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2.) Bilden Sie eine Gruppe aus nur zwei Elementen 0 und 1. Dabei soll 0 das neutrale Element sein. Welche Ergebnisse müssen die 4 Operationen

$$0 \circ 0$$

$$0 \circ 1$$

$$1 \circ 0$$

$$1 \circ 1$$

haben? Begründen Sie die Ergebnisse mit den Gruppenaxiomen.

3.) Untersuchen Sie **mit Hilfe einer Determinanten**, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im $\mathbb{R}^3$ besitzen:

(a)

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4.) Bildet $\mathbb{R}_{>1}$ mit der Verknüpfung

$$x \circ y = xy - x - y + 2$$

eine kommutative Gruppe?

5.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Hausaufgaben (Abgabe bis 4.12.2018)

- 6.) Sind die folgenden linearen Gleichungssysteme eindeutig lösbar? Begründen sie ihre Antwort.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\5x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= -23 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 41 \\5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -2 \\x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -21 \\2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

(Jeweils einen Punkt pro LGS)

- 7.) (a) Berechnen Sie mithilfe von Determinanten $a \in \mathbb{R}$ so, dass das durch $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ a \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt $21FE$ besitzt.
- (b) Wie ist $a \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch $\begin{pmatrix} -2 \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$ aufgespannt wird $0FE$ entspricht.
- (c) Wie ist $a \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch $\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, maximal wird.

(Jeweils einen Punkt, gesamt 3 Punkte)

- 8.) (a) Begründen Sie, warum folgende Mengen mit den gegebenen Verknüpfungen keine Gruppen bilden. Mit $+$, $-$ und $\cdot$ sind die gewöhnliche Addition, Subtraktion und Multiplikation gemeint.

1. $(\mathbb{Z} \setminus \{5\}, +)$
2. $(\mathbb{Q}, \cdot)$
3. $(\mathbb{R}, -)$

(jeweils einen Punkt, gesamt 3 Punkte)

- (b) Gegeben Sei eine Gruppe $(M, +)$. $\sum_{m \in M} m$ sei die Verknüpfung aller Elemente in M bzgl. $+$ und 0 das neutrale Element. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{m \in M} m = 0$$

(3 Punkte)