Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 11 12.12.2018

Präsenzaufgaben

1.) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren in $C[-\infty, \infty]$ linear unabhängig sind:

(a) $f_1(x) = 6, \quad f_2(x) = 3 \cdot \sin x, \quad f_3(x) = 2 \cdot \cos x$

(b) $f_1(x) = (3 - x)^2, \quad f_2(x) = x^2 + 6x, \quad f_3(x) = 5$

(c) $f_1(x) = e^{2x}, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x$

2.) Stellen Sie (möglichst einfach) fest, ob folgende Mengen von Vektoren ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis im $\mathbb{R}^n$ bilden. Stellen Sie ggf. fest, ob es eine Teilmenge der Vektoren gibt, die eine Basis bildet. Geben Sie jeweils die Dimension des aufgespannten Unterraums an.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3.) Schreiben Sie das Polynom $v(t) = t^2 + 4t - 3$ auf $\mathbb{R}$ als eine Linearkombination der Polynome $e_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $e_2(t) = 2t^2 - 3t$ und $e_3(t) = t + 3$.

4.) Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_1, f_2, f_3\}$ der reellen Funktionen genau dann linear unabhängig ist, wenn $\{f_1, f_1 + f_2, f_3\}$ linear unabhängig ist.

5.) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.

(b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$

Hausaufgaben (Abgabe bis 18.12.2018)

6.) Stellen Sie fest ob die folgenden Vektoren linear unabhänig sind.

(a) $\{\sin^2(x)e^x, \cos^2(x)e^x, e^x\}$

(b) $\{\sin(x), \cos(x), \tan(x)\}$

(jeweils 3 Punkte)

7.) Überlegen Sie, ob die folgenden Behauptungen stimmen, kreuzen Sie passend dazu ja oder nein an, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

	ja	nein	
a)	☐	☐	Für jede Menge $E \subset V$, V ist Vektorraum und E Erzeugendensystem, gilt $\exists B \subset E$ sodass B Basis von V.
b)	☐	☐	$\{p_1, p_2, p_3\}$ ist Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, daraus folgt, dass $\{p_1, p_2\}$ eine Basis der $\mathbb{R}^2$ ist.
c)	☐	☐	Die lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ erkennt man immer daran, dass sie entsprechend viele Nullkomponenten besitzen.
d)	☐	☐	Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Falls $a \times b \neq 0$ ist $\{a, b, a \times b\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$
e)	☐	☐	Der Vektorraum der Polynome höchstens 3. Grades hat die Dimension 4.
f)	☐	☐	Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus einem Vektorraum V sind genau dann linear unabhängig, wenn man sie nur trivial zur 0 linear kombinieren kann.

(jeweils 1 Punkt pro Antwort)

8.) Gegeben sind n Untervektorräume $U_i,\ i = 1, ..., n$ eines Vektorraums V. Es sei $U = \{u_1 + ... + u_n | u_i \in U_i, i = 1, ..., n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass jede Darstellung $u \in U,\ u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ eindeutig ist, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$ mit $u_i \in U_i$ folgt, dass $u_i = 0$ für alle $i = 1, ..., n$.

(jeweils 3 Punkte)