

Übungsblatt 11

03./04.06.2019

Präsenzaufgaben

- 1.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ derart, dass gilt:

$$\vec{a} = \vec{x} + \vec{y},$$

wobei $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{b}$ und $\vec{y} \perp \vec{b}$ ist.

- 2.) Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung

$$S : x \rightarrow x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene $\langle x, v \rangle = 0$. Hierbei stehen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt und $\|\cdot\|$ für die euklidische Norm.

- (a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall $n = 2$, dass es sich in der Tat bei S um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall $n = 2$?).
- (b) Zeigen Sie: S ist linear.
- (c) Das *dyadische Produkt* zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als die Matrix A mit den Komponenten $a_{ij} = v_i w_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie: $\text{rg}(A) = 1$.
- (d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von S . Verwenden Sie dazu das dyadische Produkt.
- (e) Ist S ein Isomorphismus? Wenn ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Andernfalls bestimmen Sie $\text{Ker}(S)$ und $\text{Bild}(S)$!

- 3.) Stellen Sie die Transformationsmatrizen für folgende Transformationen im $\mathbb{R}^3$ auf:

- (a) Drehung um die y-Achse um den Winkel ϕ
- (b) Spiegelung an der z-Achse
- (c) Dehnung in x-Richtung um den Faktor 2 und Stauchung in z-Richtung um den Faktor $\frac{1}{2}$
- (d) Hintereinanderschaltung der Transformationen in der Reihenfolge a) bis c)

Hausaufgaben (Abgabe bis 09.06.2019)

- 4.) Lösen Sie die folgenden überbestimmten Gleichungssysteme nach der Methode der kleinsten Quadrate ($\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$) und einem linearen Modell.

$$\begin{array}{l} -2x + y = 3 \\ \text{(a)} \quad x - 2y = 4 \\ \quad 2x + 2y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ \text{(b)} \quad x - y = -9 \\ \quad 2x - y = -1 \end{array}$$

Hinweis: Teil (b) liefert ein krummes Ergebnis.

(je 3 Punkte)

- 5.) Gegeben seien die Meßpunkte (t_i, y_i) mit $i = 1, \dots, 4$:

$$(-1, -11), (0, 10), (1, 11), (2, -10)$$

Stellen Sie die (meist überbestimmten) Gleichungssysteme für die unbekannten Parameter a, b, c auf, wenn folgende Beziehungen zwischen den y und den t gelten:

$$\text{(a)} \quad y = a$$

$$\text{(b)} \quad y = a + b \cdot t$$

$$\text{(c)} \quad y = a + b \cdot t + c \cdot t^2$$

und bestimmen Sie die Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate. Fertigen Sie eine Skizze.

(je 3 Punkte)

- 6.) **Typische IHK-Aufgabe.** Eine Messreihe ergibt zu den Zeiten $t = 1, 2, 3, 4, 5$ in Sekunden folgende Temperaturwerte:

t Sekunden	1	2	3	4	5
$y(t)^\circ\text{C}$	0,9	5,8	11,4	12,1	12,9

Stellen Sie das (überbestimmte) Gleichungssystem für die unbekannten Parameter a und b auf und bestimmen Sie diese nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn folgende Beziehung zwischen y und t gilt:

$$y(t) = a \cdot t + b \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

(3 Punkte)