

Übungsblatt 11

11./12.12.2019

Präsenzaufgaben

1. Gegeben ist ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$U = \{\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 0\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

2. Untersuchen Sie die drei gegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Stellen Sie (möglichst einfach) fest, ob folgende Mengen von Vektoren ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis im $\mathbb{R}^n$ bilden. Stellen Sie ggf. fest, ob es eine Teilmenge der Vektoren gibt, die eine Basis bildet. Geben Sie jeweils die Dimension des aufgespannten Unterraums an.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} & \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{c) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} & \text{d) } \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{array}$$

4. Der Vektor x habe die Koordinaten $(1, 2, 3)^T$ bezüglich der kanonischen Basis. Welche Koordinaten hat er bezüglich der Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Zeigen Sie zuerst, dass es sich um eine Basis handelt.

Hausaufgaben (Abgabe bis 17.12.2019)

1. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Auf der Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, \dots)$ mit Elementen $a_i \in K, \forall i \in \mathbb{N}$, sei eine Addition

$$\oplus : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, ((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}) \longmapsto (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i \in \mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

und eine Skalarmultiplikation

$$\circ : K \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, (k, (a_i)_{i \in \mathbb{N}}) \longmapsto k \circ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} := (k \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

definiert.

Zeigen Sie mit den Vektorraumaxiomen, dass $\mathcal{F}$ ein K -Vektorraum ist.

2. Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Sind U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

a) $U_1 = \{\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = 0\}$

b) $U_2 = \{\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = 1\}$

3. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β, γ ergibt sich eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionale lineare Hülle $L(a, b, c)$?

4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugte Untervektorraum.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie eine Basis des Untervektorraums U an.

b) Ergänzen Sie diese Basis des Untervektorraums U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$