FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra I, SS 2013, am 05.07.2013

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(14)
Aufgabe 2)		(14)
Aufgabe 3)		(14)
Aufgabe 4)		(14)
Aufgabe 5)		(14)
Aufgabe 6)		(14)
Aufgabe 7)		(16)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Ein Zauberkünstler "verblüfft"mit einem Rechentrick:
Er beauftragt einen Zuschauer damit, sich 3 beliebige Zahlen auszudenken und verdeckt auf einem Blatt aufzuschreiben.
Der Zauberer will auf Anhieb die 3 gedachten Zahlen erraten, wenn man ihm nur die 3 Summen von jeweils 2 gedachten Zahlen nennt. Der Zuschauer nennt als Summen die Zahlen 6, 11 und 15. Welches sind in diesem Fall die gedachten Zahlen ?

Ergebnis: 5, 1 und 10

Aufgabe 2

V ist der von den folgenden Vektoren aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen b so, dass $\begin{pmatrix} 3b+6 \\ b^2+3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Element des Vektorraums V ist.

Ergebnis: $b = -1$ oder $b = -2$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Menge $G = \mathbb{Q}_{>0}$ mitsamt der zugehörigen Verknüpfung

$$a \odot b := \frac{a \cdot b}{2}$$

eine Gruppe bildet.

Kein Ergebnis anzugeben!

Aufgabe 4

Eine sturmgefährdete Fichte an einem gleichmäßig geneigten Hang soll mit Seilen an den Punkten A und B befestigt werden. Zur Berechnung dient ein kartesisches Koordinatensystem $(x, y, z)^T$, wobei z die relative Höhe zum Fuß der Fichte ist. Die Fichte wächst total gerade, also nur in z-Richtung.
Eine Einheit entspricht einem Meter. In diesem Koordinatensystem steht die Fichte am Punkt $P = (1, 4, 0)^T$ auf dem Boden. Die Befestigungspunkte liegen bei $A = (4, 6, -1)^T$ und $B = (2, 2, 1)^T$. Die Seile werden in 5 m Höhe an der Fichte befestigt.

a) Fertigen Sie eine Skizze an.

   Kein Ergebnis anzugeben

b) Welche Länge haben die beiden Seile?

   Ergebnis: $\sqrt{49}$ und $\sqrt{21}$

c) Sind die jeweiligen Winkel zwischen den Seilen und der Hangebene größer als 30°?

   Die Winkel zwischen den Seilen und der Hangebene sind beide größer als 30°

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\forall\ n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kein Ergebnis anzugeben!

Aufgabe 6

Betrachtet wird der Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit folgendem Skalarprodukt

$$< \vec{a}, \vec{b} >= \sum_{k=1}^{3} a_k \cdot \overline{b_k}, \ \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$$

Gegeben ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie zwei Vektoren aus $\mathbb{C}^3$, sodass zusammen mit dem gegebenenen Vektor eine orthogonale Basis des $\mathbb{C}^3$ entsteht.

Hinweise: $i^2 = -1$, $\overline{b_k}$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu b_k.

Beispielergebnis: $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{28}} \begin{pmatrix} -2-2i \\ -1-2i \\ 4+i \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			Gegeben seien zwei Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.
2			Jede Teilmenge einer Menge linear abhï¿½ngiger Vektoren ist linear abhï¿½ngig.
3			Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ heiï¿½en orthonormal, wenn $\vec{b}^T \cdot \vec{a} = 0$ und $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ gilt.
4			Vier Punkte aus dem $\mathbb{R}^3$ liegen immer in einer Ebene.

Kein Ergebnis anzugeben!