

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

- 1.) Ein Himmelskörper H_1 bewegt sich auf einer Kreisbahn in einer Ebene, die senkrecht zur Richtung $(1, 1, 1)^T$ liegt und in der sich der Ursprung eines Koordinatensystems befindet.

Der Himmelskörper H_2 bewegt sich auf einer Kreisbahn um einen Fixstern in $(2, 1, 1)^T$. Die Ebene seiner Kreisbahn ist senkrecht zur Richtung $(1, -1, 1)^T$.

- (a) Bestimmen Sie die Menge der Punkte, an denen H_1 und H_2 potentiell zusammenstoßen könnten.

$$\text{Ergebnis: } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Welchen Radius muss die Kreisbahn von H_2 mindestens haben, damit ein Zusammenstoß möglich ist?

$$\text{Ergebnis: } r = \sqrt{6}$$

- 2.) Ein Laser, der sich im Ursprung eines Koordinatensystems befindet, soll ein Loch in ein Blech brennen. Das Blech, dessen Dicke vernachlässigt werden kann, ist unter anderem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

fixiert. Dabei entsteht ein Loch im Blech an der Stelle $(5, 4, 3)^T$.

- (a) Unter welchem Winkel trifft der Laserstrahl auf das Blech?

Ergebnis: $\varphi = \frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$

- (b) Wie weit steht der Laser von dem Blech entfernt?

Ergebnis: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ LE

3.) Untersuchen Sie jeweils, ob die 3 angegeben Funktionen in den angegebenen Intervallen linear unabhängig sind:

(a) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \cos(x)$, $f_3(x) = \sin(x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ergebnis: f_1, f_2 und f_3 sind linear unabhängig

(b) $g_1(x) = x^2 + 1$, $g_2(x) = x - 2$, $g_3(x) = 2x^2 + x$ im Bereich der reellen Zahlen

Ergebnis: f_1, f_2 und f_3 sind linear abhängig

4.) Sei

$$M_c := \{f(x) \mid f'(17) = c\}$$

die Menge der Funktionen mit Tangentensteigung c an der Stelle $x = 17$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge M_c allgemein keinen Unterraum des Vektorraums der differenzierbaren Funktionen bildet.

Kein Ergebnis anzugeben!

- (b) Für welches spezielle c bildet M_c jedoch sehr wohl einen Unterraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ergebnis: $c = 0$ mathematische Begründung nicht vergessen!

- 5.) Orthonormieren Sie die folgenden 3 Vektoren mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Achten Sie dabei darauf, dass unter der Menge der Vektoren der zu erzeugenden Orthonormalbasis eine Teilmenge existiert, die die gleiche Lineare Hülle erzeugt wie die Vektoren \vec{b} und \vec{c} .

Ergebnis: $\vec{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\mu}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{\mu}_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegebenenfalls kann die Reihenfolge abweichen.

6.) Testen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			n oder mehr linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis eines n -dimensionalen Vektorraums.
2			Ein Erzeugendensystem ist automatisch eine Basis.
3			Die Definition des Kreuz- bzw. Vektorproduktes bezieht sich ausschließlich auf den \mathbb{R}^3 .
4			Die Größe eines Winkels zwischen Vektoren hängt vom verwendeten Skalarprodukt ab.
5			Für die Definition eines Vektorraums benötigt man die Definition eines Körpers.
6			Die reellen Zahlen bilden bzgl. der Division eine Gruppe.
7			Die Relation $\vec{x} \sim \vec{y} := \text{„}\vec{x} \text{ und } \vec{y} \text{ schließen einen Winkel von } 60^\circ \text{ ein“}$ bildet eine Äquivalenzrelation.
8			Normalformen gibt es nur für Hyperebenen.
9			Eine Ebene im \mathbb{R}^3 ist eindeutig durch ihren Normalenvektor beschrieben.
10			Die Norm des Vektorprodukts zweier Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 gibt den Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms an.

Richtige Antworten geben 1,5 Punkte, für falsche wird ein Punkt abgezogen! Nicht angekreuzte Behauptungen geben 0 Punkte. Negative Gesamtpunkte werden als 0 Punkte gezählt.

Ergebnisse werden nicht mit angegeben!