Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 12

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass das Tupel (f_0, f_1, f_2), gegeben durch

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = (x - x_0), \quad f_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

eine Basis im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 bilden.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom möglichst niedrigen Grades, das an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A = (-2/3), \quad B = (-1/2), \quad C = (2/5).$$

Stellen Sie das Polynom auch in seiner Faktorzerlegung dar.

Aufgabe 3

Es seien $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ Polynome aus dem Raum P_2 mit $b_i, a_i \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ ein Skalarprodukt auf P_2 definiert ist.

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren

   (a) $p(x) = -1 + 5x + 2x^2$ und $q(x) = 2 + 4x - 9x^2$

   (b) $p(x) = x - x^2$ und $q(x) = 7 + 3x + 3x^2$

Tipp: Der Winkel ist wie bei den Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert, wobei das hier gegebene Skalarprodukt und die Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ zu verwenden sind.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit der Projektionsformel $p = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}y$ im unitären Raum $\mathbb{C}^2$ die Projektion von $x = (1 + i; 2 + i)^\top$ auf $y = (1 - i; -1)^\top$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Gegeben sei die Basis $B = (1, x^2, x^4)$ eines Untervektorraums V von P_4.

(a) Zeigen Sie, dass alle Polynome in V achsensymmetrisch sind.

(b) Zeigen Sie: Jedes Polynom in P_4 ist darstellbar als Summe eines achsensymmetrischen und eines punktsymmetrischen Polynoms.

(c) Zeigen Sie: Bei der Menge der punktsymmetrischen Polynome in P_4 handelt es sich um einen Untervektorraum. Welche Dimension hat er?

(d) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{gathered} 3x^4 - 7x^2 + 2 \\ -x^4 + 2x^2 - 1 \\ 4x^4 + 3x^2 + 2 \end{gathered}$$

Aufgabe 6

Gegeben seien vier Punkte in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1;\, \alpha - 2), \quad (-1;\, 2 - \alpha), \quad (-2;\, 25 - 8\alpha), \quad \left(\frac{1}{2}; \frac{\alpha - 5}{8}\right)$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α ein Interpolationspolynom möglichst geringen Grades. Geben Sie den Grad des Polynoms in Abhängigkeit von α an.

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

für folgende Vektoren aus dem Vektorraum P_3:

(a) $p(x) = 1 - x + x^2 + 5x^3$ und $q(x) = x - 3x^2$

(b) $p(x) = x - 5x^3$ und $q(x) = 2 + 8x^2$

Aufgabe 8

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen. Seien $U, V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch $\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$ **kein** Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert wird.