

Übungsblatt 14

20.01.2022

Wiederholung Kap. 4 - Differentialrechnung & Kap. 5 - Integration

1. Zeigen Sie mit dem Satz von Rolle, dass das Polynom

$$p(x) = x^3 + a \cdot x + b \quad \text{für} \quad a > 0$$

keine zwei reellen Nullstellen besitzen kann.

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte, falls diese existieren

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{e^x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\frac{1}{\ln(x)}} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 9} - (x - 3) \right)$

3. a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades für die Funktion $g(x) = \ln(x \cdot e^{-2x})$ an der Stelle $x_0 = 1$.
b) Berechnen Sie $g(1,25)$ näherungsweise mittels des Taylorpolynoms.

4. Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$

b) $\int \frac{(x^2+1)^2 + x}{x \cdot (x^2+1)} dx$

c) $\int \frac{1}{x \cdot (x+1)} dx$

5. Bestimmen Sie die Fläche, die von den folgenden beiden Funktionen eingeschlossen wird:

$$f(x) = -x^2 + 2x \quad \text{und} \quad g(x) = -2x - 4$$

6. Der Graph der Funktion f zu $f(x) = \ln(x)$, die x -Achse und die Geraden mit der Gleichung $x = 1$ und $x = e$ begrenzen eine Fläche, die um die x -Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

7. Bestimmen Sie folgende Funktion

$$\left(\int_{e^{-x}}^{e^x} \ln(t) dt \right)'$$

8. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

b) $\int_3^{\infty} \frac{8}{4-x^2} dx$