

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Wienke

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG

Klausur **Lineare Algebra 1**, WS 2020/21, am 18.03.2021

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(6+5+1)
Aufgabe 2)		(7+5)
Aufgabe 3)		(3+3+3+3)
Aufgabe 4)		(9+3)
Aufgabe 5)		(5+4+4)
Aufgabe 6)		(1+7+5)
Aufgabe 7)		(6+7)
Aufgabe 8)		(10+3)
Gesamtpunkte:		Note:

Aufgabe 1

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sollen eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

- a) Bestimmen Sie alle möglichen $a \in \mathbb{R}$, die das oben genannte Kriterium erfüllen.

Ergebnis: alle $a \in \mathbb{R}$

- b) Bestimmen Sie die Mengen M_{12} , M_{13} und M_{23} mit

$$M_{ij} := \{a \in \mathbb{R} \mid b_i \perp b_j\}.$$

Ergebnis: $M_{12} = \mathbb{R}$, $M_{13} = \{-1\}$, $M_{23} = \{-1, 1\}$

- c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ bilden die drei Vektoren demnach eine Orthogonalbasis?

Ergebnis: $a = -1$

Aufgabe 2

Beim Blick in den Kühlschrank findet Kunigunde für die eingeladenen Gäste folgende Zutaten: 1,5 kg Kartoffeln, 900 g Fleisch und 5 Eier.

- Für Gericht A benötigt sie pro Portion 100 g Kartoffeln, 200 g Fleisch und ein Ei.
 - Für Gericht B benötigt sie pro Portion 500 g Kartoffeln und 100 g Fleisch.
 - Für Gericht C benötigt sie pro Portion 200 g Kartoffeln, 200 g Fleisch und 2 Eier.
- a) Bestimmen Sie, wie viele Portionen sie jeweils zubereiten kann, falls sie alle ihre Vorräte exakt aufbrauchen möchte und nicht unbedingt ganze Portionen braucht.

Ergebnis: Gericht A: 2, Gericht B: 2, Gericht C: 1,5

- b) Welche Möglichkeiten hat sie, falls sie stattdessen möglichst viele, aber nur ganze Portionen zubereiten will, jedes Gericht mindestens einmal zubereitet werden soll und ihre Vorräte nicht aufgebraucht werden müssen?

Ergebnis:

Option 1: 3xA, 1xB, 1xC

Option 2: 2xA, 2xB, 1xC

Option 3: 1xA, 2xB, 2xC

Aufgabe 3

Ein Roboterarm, der am Montagepunkt $P(4, 3)$ montiert ist, soll Gegenstände auf ein Förderband auf der Geraden

$$f : x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

legen. Bestimmen Sie für die folgenden Fälle jeweils

- an welchem Punkt G der Roboterarm den Gegenstand auf das Förderband legt
- welchen Abstand er vom Montagepunkt zu G überwinden muss,
- den Winkel zwischen seiner Bewegungsrichtung und der Laufrichtung des Förderbandes

wenn er

a) den waagerechten Weg, also parallel zur x -Achse,

Ergebnis: $G_a = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $d_a = 9$, $\alpha_a = 45^\circ$

b) den senkrechten Weg, also parallel zur y -Achse,

Ergebnis: $G_b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $d_b = 9$, $\alpha_b = 45^\circ$

c) den kürzesten Weg bzw.

Ergebnis: $G_c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $d_c = \frac{9}{\sqrt{2}}$, $\alpha_c = 90^\circ$

d) den Weg in Richtung des Vektors $v = (2, 1)^T$

Ergebnis: $G_d = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d_d = 3\sqrt{5}$, $\alpha_d = 72^\circ$

wählt.

Hinweise:

- Eine Skizze kann hilfreich sein.
- $\arccos(\frac{1}{\sqrt{10}}) \approx 72^\circ$

Aufgabe 4

Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- a) Wenden Sie das Orthonormierungsverfahren nach Gram-Schmidt in der angegebenen Reihenfolge auf die drei Vektoren an.

Ergebnis: $w_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
 w_3 nicht berechenbar (Begründung angeben!)

- b) Welche Dimension hat der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ergebnis: $\dim(v_1, v_2, v_3) = 2$

Aufgabe 5

Eine gleichseitige 4-seitige Pyramide besteht bekanntlich aus 4 gleichen Seiten sowie einer Grundfläche. Es sei bekannt:

- Die Seite S_1 liegt in der Ebene $2x - 4y + z = 0$.
- Eine andere Seite S_2 liegt in der Ebene $4x + 2y - z = 0$.
- Eine dritte Seite S_3 beinhaltet die Punkte $A(4, 2, 0)$, $B(2, 6, 0)$ und $C(1, 3, 10)$.

a) Zeigen Sie, dass die Schnittgerade von S_1 und S_3 genau durch die Punkte A und C verläuft.

keine Angabe

b) Berechnen Sie die Spitze der Pyramide.

Ergebnis: $S = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie die Oberfläche, d.h. die Fläche aller 4 Seiten und der Grundfläche, unter der Annahme, dass A , B und C genau die Ecken von S_3 bilden.

Ergebnis: $A_{Ges} = 20 + 20\sqrt{21}$

Aufgabe 6

- a) Seien $a = (a_1, a_2, a_3)^T, b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) $a \times b$ an.

Ergebnis: $a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

- b) Bekanntermaßen besitzen Geraden in $\mathbb{R}^3$ keine Darstellung in Normalform, weil die Richtung eines Normalenvektors zu einer Geraden nicht bestimmt ist. Sie besitzen aber sehr wohl eine parameterfreie Darstellung. Zu $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^3$ sei

$$G := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0) \times v = 0\}.$$

Beweisen Sie: G ist eine Gerade mit Richtungsvektor v und Aufpunkt x_0 .

keine Angabe

- c) Sei g eine Gerade mit Richtungsvektor v und Aufpunkt x_0 und d ihr Abstand zum Nullpunkt. Beweisen Sie für die euklidische Norm $\|\cdot\|$:

$$d = \frac{\|x_0 \times v\|}{\|v\|}$$

Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

keine Angabe

Aufgabe 7

- a) Sei $V = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{R}$. Für $a, b \in V$ sei definiert:

$$a \oplus b := \max\{a - b, b - a\}.$$

Untersuchen Sie, ob V mit $\oplus$ und der üblichen Multiplikation reeller Zahlen “ $\cdot$ ” einen Vektorraum über K bildet. Belegen Sie Ihre Aussage durch einen Beweis bzw. durch ein Gegenbeispiel.

keine Angabe

- b) Sei für V und K wie oben jetzt

$$a \oplus b := \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p}.$$

Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass für kein $p \in \mathbb{N}$ das Tripel $(V, \oplus, \cdot)$ mit der üblichen Multiplikation reeller Zahlen “ $\cdot$ ” einen Vektorraum über K bilden kann.

keine Angabe

Aufgabe 8

- a) Wir betrachten den euklidischen Vektorraum P_2 der Polynome vom Höchstgrad 2 auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$$

(dass es sich hierbei um ein Skalarprodukt handelt, muss nicht gezeigt werden).

Sei nun $M = \{x-1, x+1\}$. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $M^\perp$ in P_2 , indem Sie dessen Dimension sowie eine zugehörige Basis angeben. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Ergebnis: $M^\perp = \text{span}(-3x^2 + 1)$

- b) Sei $v \in M^\perp$ beliebig. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von v auf den Untervektorraum $L(x-1, x+1)$ (mit L ist die lineare Hülle gemeint) und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Ergebnis: $p(v) = 0$