

Klausur **Lineare Algebra 1**, SS 2021, am 20.09.2021

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Wienke

keine Hilfsmittel

Aufgabe 1 (10+2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Orthonormalisieren Sie die Vektoren a, b, c in der angegebenen Reihenfolge mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.

$$\text{Ergebnis: } w_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{\sqrt{6}}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- b) Begründen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

keine Angabe

Aufgabe 2 (7+3+2 Punkte)

Eine Eisenbahngesellschaft betreibt drei Strecken A, B und C.

- Auf Strecke A kostet ein Ticket pro Person 5 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 4 EUR geschätzt.
- Auf Strecke B kostet ein Ticket pro Person 6 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 5 EUR geschätzt.
- Auf Strecke C kostet ein Ticket pro Person 3 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 5 EUR geschätzt.

Im vorherigen Jahr hatte die Eisenbahngesellschaft Ticketeinnahmen in Höhe von 30 Mio. Euro und Kosten in Höhe von 27 Mio. Euro.

- a) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und lösen es in allgemeiner Form, also für uneingeschränkte reelle Werte der Unbekannten.

$$\text{Ergebnis: } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 15 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

- b) Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrgäste auf den Strecken A und B in dem Wissen, dass der Staat den Betrieb auf Strecke C mit genau 1 Mio. Fahrgästen zur Bedingung für den Gesamtbetrieb ausgeschrieben hat.

Ergebnis: Strecke A: 3 Mio. & Strecke B: 2 Mio.

- c) Kann der Gewinn (Ticketeinnahmen - Kosten) durch eine Umverteilung auf den Strecken A und B bei unveränderter Gesamtanzahl aller Fahrgäste und genau 1 Mio. Fahrgästen auf Strecke C noch gesteigert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

keine Angabe

Aufgabe 3 (2+4+4+2 Punkte)

Auf der Suche nach den Elektrokabeln in ihrem Altbau hat Erika folgende Kabel gefunden:

- Kabel A beginnt im Punkt $(0,0,0)$ und geht von dort mit der Richtung $(3, -1, 1)^T$ weiter.
- Kabel B beginnt im Punkt $(1,-1,1)$ und geht von dort mit der Richtung $(4, -1, 1)^T$ weiter.

Da zwischen den Kabeln eine Verbindung besteht, müssen die beiden an ihrem Schnittpunkt verbunden sein.

- a) Zeigen Sie, dass die Kabel nicht parallel verlaufen.

keine Angabe

- b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Kabel.

Ergebnis: Der Schnittpunkt lautet $(9, -3, 3)$.

- c) An welcher Stelle muss eine Lampe an Position $(5,-1,6)$ an Kabel A angeschlossen werden, wenn das Kabel zwischen der Lampe und Kabel A möglichst kurz sein soll.

Ergebnis: Die gesuchte Stelle liegt bei $(6, -2, 2)$.

- d) Wie lang ist dann das Kabel zwischen der Lampe und Kabel A?

Ergebnis: Die Länge beträgt $3\sqrt{2}$.

Aufgabe 4 (8+4 Punkte)

Es seien $(x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Handelt es sich bei den folgenden Abbildungen um Skalarprodukte?

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x, y) = x_1^2 + 2x_2y_1 + y_1^2$

Wenn es sich um ein Skalarprodukt handelt, beweisen Sie dies; wenn nicht, widerlegen Sie dies durch ein konkretes Gegenbeispiel.

[keine Angabe](#)

Aufgabe 5 (3+4+3+3 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind Untervektorräume von \mathbb{R}^2 ?

a) $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

b) $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$

c) $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

d) $U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$

Wenn es sich um einen Untervektorraum handelt, beweisen Sie dies; wenn nicht, widerlegen Sie dies durch ein konkretes Gegenbeispiel.

keine Angabe

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ seien linear unabhängig. Zeigen Sie: Dann sind die Vektoren

$$v_1 + v_2, \quad v_2 + v_3, \quad -v_3$$

linear unabhängig.

keine Angabe

Aufgabe 7 (3+3+3+4 Punkte)

Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum, K ein Körper.

- a) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit.

keine Angabe

- b) Definieren Sie den Begriff eines Erzeugendensystems von V .

keine Angabe

- c) Beweisen oder widerlegen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel: "Jedes Tupel linear unabhängiger Vektoren ist eine Basis."

keine Angabe

- d) Bekanntermaßen handelt es sich bei $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, der Menge aller reellen 2×2 -Matrizen, zusammen mit der üblichen Addition von Matrizen und der üblichen Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar um einen reellen Vektorraum. Gegeben seien nun die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass es sich bei (A, B, C, D) um eine Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ handelt.

keine Angabe

Aufgabe 8 (3+3+5+2 Punkte)

Sei V ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum und U ein Untervektorraum von V .

- a) Definieren Sie die orthogonale Projektion eines Vektors v auf U .

keine Angabe

- b) Wir betrachten den Vektorraum $V := L(1, x^2 - 1/3\pi^2, \sin x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx, \quad f, g \in V.$$

Sie dürfen voraussetzen, dass es sich hierbei tatsächlich um ein Skalarprodukt auf V handelt. Es steht in obiger Definition $L(\dots)$ für die lineare Hülle. Zeigen Sie: $(1, x^2 - 1/3\pi^2)$ ist eine Orthogonalbasis von $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$.

keine Angabe

- c) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $\sin x$ auf $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$.

Ergebnis: $p_L(\sin(x)) = 0$

- d) Berechnen Sie das orthogonale Komplement von $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$ in V , also $(L(1, x^2 - 1/3\pi^2))^\perp$.

Ergebnis: $(L(1, x^2 - 1/3\pi^2))^\perp = L(\sin(x))$