

Übungsblatt 5

02.11.2022

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie die Parameterform der Ebene durch die drei Punkte $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 4, 1)$ und $C = (3, -1, 0)$. Liegt der Punkt $D = (1, -5, 4)$ in der Ebene?
- (b) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf dieser Ebene steht und damit eine parameterfreie Ebenengleichung.

Aufgabe 2

Berechnen Sie zu den folgenden Geradengleichungen die anderen Darstellungsformen (Zwei-punkteform, Punktrichtungsform, Normalform, Hesse'sche Normalform):

- (a) $G_1 : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (b) $G_2 : 2x + y = 5$
- (c) $G_3 : \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4$
- (d) Gerade G_4 durch die Punkte $P = (3, 2)$ und $Q = (1, 1)$
- (e) $G_5 : \langle n, x \rangle = 4$ mit $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Gegeben seien vier Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Liegen die vier Punkte auf einer Ebene?
- (b) Bestimmen Sie α so, dass der Punkt $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ auf der Ebene durch die Punkte A, B und C liegt.
- (c) E_{ABC} sei die Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen. Bestimmen Sie β so, dass $E : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und E_{ABC} identisch sind. Geben Sie eine Normalengleichung der Ebene E_{ABC} an.

Aufgabe 4

Der Lousberg soll durch einen Tunnel durchquerbar gemacht werden. Zwei Teams von Bauarbeitern bohren sich durch den Tunnel. Das eine Team beginnt in 80 Metern Höhe bei den x-y-Koordinaten (-30m,40m) und gräbt sich in Richtung (1,-1,0) vor. Das zweite Team hat Probleme mit ihrer Software zur Ermittlung der richtigen Richtung. Es fängt an den x-y-z-Koordinaten (40m,-30m,140m) an zu graben. Leider kommt es von der richtigen Grabrichtung (-1,1,-2) ab und gräbt stattdessen von Beginn an in Richtung (-1,2,-2).

- (a) Wo hätten sich die beiden Teams getroffen, wenn alles normal verlaufen wäre?
- (b) In welche Richtung muss das zweite Team weiter graben, damit sie den Treffpunkt noch erreichen, obwohl sie bereits 30m entlang der falschen Richtung (-1,1,2) gegraben haben?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine Gleichung der Geraden durch folgende Punkte:

(a) $P_1 = (2, 3)$ $P_2 = (1, 1)$

(b) $A = (0, 0)$ $B = (2, 3)$

(c) $R = (1, 2)$ $S = (3, 2)$

Geben Sie sie in einer parameterlosen Darstellung und einer Parameterdarstellung an.

Aufgabe 6

Berechnen Sie zu den folgenden Ebenengleichungen im \mathbb{R}^3 die jeweils anderen Darstellungsformen (Punkt-Richtungsform, Normalform, Hessesche Normalform)

(a) $E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $E_2 : 2x_1 + x_2 = 7$

(c) $E_3 : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1$

(d) Ebene E_4 durch die Punkte $P = (1; 2; 3)$, $Q = (1; 3; 2)$ und $R = (0; 2; 1)$

(e) $E_5 : \langle n, x \rangle = 4$ mit $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

Typische IHK-Aufgabe. Der 10 km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4 km Seitenlänge, soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden.

Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zurücklegt. Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x- bzw. y-Koordinatenachsen verlaufen, nähert sich das Objekt entlang der Geraden

$$g : x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}.$$

Machen Sie zuerst eine Skizze. Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (xz)-Ebene liegt (Hinweis: $y = 0$). Wo liegt der Austrittspunkt (Hinweis: $y = 4$)? Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?

Aufgabe 8

Typische IHK-Aufgabe. Ein Gebäude in Form einer Pyramide hat die Eckpunkte $O = (0, 0, 0)$, $A = (6, 8, 0)$, $B = (0, 8, 0)$ und die Spitze $S = (2, 4, 8)$. Von der Ecke B verläuft zum Punkt $P = (4, 6, 4)$ ein Stahlträger.

(a) Zeigen Sie, dass P in der Ebene E_{OAS} liegt, die die Pyramidenseite OAS enthält.

(b) Überprüfen Sie, ob der Stahlträger senkrecht auf die Ebene E_{OAS} trifft.