Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 12 05./06.06.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

(a) Welche speziellen Eigenschaften besitzt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}?$$

Hinweis: Es sind zwei Eigenschaften gesucht.

(b) Bestimmen Sie anschließend die inverse Matrix A^{-1}. Dies ist mit den speziellen Eigenschaften von A einfach. Was kann man außerdem über den Wert von $\det(A)$ sagen?

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. Berechnen Sie zu $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Bildvektor $y = Ax$ und vergleichen Sie den Winkel zwischen x und y mit dem zwischen Ax und Ay.

(b) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung, deren Abbildungsmatrix orthogonal ist, den Winkel zwischen Vektoren unverändert lässt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie dazu schrittweise, dass:

(a) H_n symmetrisch ist,

(b) H_n zu sich selbst invers ist

(c) und daraus die Orthogonalität von H_n folgt.

(d) Verifizieren Sie zum Schluss die Aussage für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Die Abbildung f_A dreht einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ innerhalb der x-z-Ebene um einen Winkel ϕ. Die Abbildung f_B spiegelt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ an der x-Achse.

(a) Stellen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen A und B auf.

(b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der hintereinander geschalteten Abbildungen $f_B \circ f_A$ auf.

(c) Bestimmen Sie auch die zugehörige Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung $(f_B \circ f_A)^{-1}$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist und bestimmen Sie ihre Inverse.

Aufgabe 6

Eine Lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ hat bzgl. der kanonischen Basen E die Abbildungsmatrix

$$F_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie die Transformationsmatrizen auf, die Vektoren aus der Basis

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw.

$$Z = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

in die kanonische Basis transformiert.

(b) Bestimmen Sie ohne aufwendige Rechnung die Transformationsmatrizen, die Vektoren aus der kanonischen Basis in die Basis D bzw. Z transformiert.

(c) Schreiben Sie auf, wie man die Abbildungsmatrix F_Z^D zu Φ bzgl. der Basen D und Z berechnen kann. Die (aufwendige) Rechnung müssen Sie anschließend nicht durchführen.