Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2023/24

Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 4 25.10.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B. Untersuchen sie jeweils, ob der Punkt C auf dieser Geraden liegt.

(a) $A = (-2; 1)$, $B = (2; 2)$ und $C = (-10; 5)$

(b) $A = (1; 2; 3)$, $B = (3; 1; 2)$ und $C = (-9; 7; 8)$

Aufgabe 2

Berechnen Sie zu den folgenden Geradengleichungen die anderen Darstellungsformen (Zweipunkteform, Punktrichtungsform, Normalform, Hesse‘sche Normalform):

(a) $G_1 : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $G_2 : 2x + y = 5$

(c) $G_3 :< \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >= 4$

(d) Gerade G_4 durch die Punkte $P = (3, 2)$ und $Q = (1, 1)$

(e) $G_5 :< n, x >= 4$ mit $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Gegeben seien vier Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Liegen die vier Punkte auf einer Ebene?

(b) Bestimmen Sie α so, dass der Punkt $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ auf der Ebene E_{ABC} liegt.

(c) E_{ABC} sei die Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen. Bestimmen Sie β so, dass $E : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und E_{ABC} identisch sind. Geben Sie eine Normalengleichung der Ebene E_{ABC} an.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösungen x der Gleichung $a \times x = b$ für $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und

(a) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

falls es überhaupt Lösungen gibt.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Die Vektoren b und a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ sind gegeben durch

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \; a_{n+1} = (a_n \times b) \times b$$

Berechnen Sie die Vektoren a_1, a_2 und a_3, gebe eine explizite Formel für a_n an und beweise sie durch vollständige Induktion.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die allgemeine Gleichung der Geraden durch folgende Punkte:

(a) $P_1 = (2, 3) \quad P_2 = (1, 1)$

(b) $A = (0, 0) \quad B = (2, 3)$

(c) $R = (1, 2) \quad S = (3, 2)$

Geben Sie sie in einer parameterlosen Darstellung und einer Parameterdarstellung an.

Aufgabe 7

Berechnen Sie zu den folgenden Ebenengleichungen im $\mathbb{R}^3$ die jeweils anderen Darstellungsformen (Punkt-Richtungsform, Normalform, Hessesche Normalform)

(a) $E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $E_2 : 2x_1 + x_2 = 7$

(c) $E_3 : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1$

(d) Ebene E_4 durch die Punkte $P = (1; 2; 3)$, $Q = (1; 3; 2)$ und $R = (0; 2; 1)$

(e) $E_5 : \langle n, x \rangle = 4$ mit $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Typische IHK-Aufgabe. Der 10 km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4 km Seitenlänge, soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden.
Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zurücklegt. Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x- bzw. y-Koordinatenachsen verlaufen, nähert sich das Objekt entlang der Geraden

$$g : x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}.$$

Machen Sie zuerst eine Skizze. Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (xz)-Ebene liegt (Hinweis: $y = 0$). Wo liegt der Austrittspunkt (Hinweis: $y = 4$)? Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?