Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2023/24

Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 13 10.01.2024

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Vektorraum V und eine Menge M von Vektoren aus V. Untersuchen Sie die Eigenschaften „Lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus M", „M bildet eine Basis", „M bildet ein Erzeugendensystem", „M bildet eine Orthogonalbasis" und „M bildet ein Orthonormalsystem".

(a) Welche Eigenschaften implizieren die jeweils anderen:

		impliziert die Eigenschaft				
	Eigenschaften	lin. unabh.	Basis	ES	OGB	ONS
gegeben	linear unabhängig					
	Basis					
	Erzeugendensystem (ES)					
	Orthogonalbasis (OGB)					
	Orthonormalsystem (ONS)					

(b) Finden Sie zu jeder der obigen Eigenschaften ein einfaches Beispiel, das nur die Eigenschaft selbst und die damit implizierten Eigenschaften erfüllt, alle anderen jedoch nicht.

Aufgabe 2

Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -5 \\ \alpha \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie müssen die reellen Parameter α und β gewählt werden, damit die Vektoren a, b und c ein Orthogonalsystem bilden? Bestimmen Sie für diesen Fall die orthogonale Projektion des Vektors v auf den durch die Vektoren a, b und c aufgespannten Unterraum!

Aufgabe 3

Es sei W der Unterraum des $\mathbb{R}^5$, der durch $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an.

Aufgabe 4

Bilden die 3 Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bilden Sie daraus gegebenenfalls eine Orthonormalbasis.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^4$. Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis an.

Aufgabe 6

Sei W die lineare Hülle der Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. Das orthogonale Komplement zu W ist $W^\perp$. Schreiben Sie

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

als Summe $w = (w_1 + w_2)$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$.

Aufgabe 7

Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren b, c an, die senkrecht auf dem Vektor $a = (-2, 1, 2, -3)$ stehen. Orthonormieren Sie die drei Vektoren a, b und c.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $L^\perp$ zu L, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welche Dimension besitzt $L^\perp$?