Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 24.06.2009

1.) Gegeben seien

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ b \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ a \\ 19 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$

(a) schneidet die Gerade g die Ebene E

(b) liegt die Gerade g in der Ebene E

(c) verläuft die Gerade g parallel zur Ebene E

2.) Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie - falls möglich - mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt aus V eine Orthonormalbasis von U.

(b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^{\perp}$?

3.) 4 Freunde Anton, Berta, Christoph und Daniela unterhalten sich über die Preise in der Bäckerei. Anton sagt, dass 7 Brote genau so viel kosten wie 8 Brötchen und 6 Stücke Kuchen. Berta hat für 5 Brote und 10 Brötchen so viel bezahlt wie der Kunde vor ihr für 9 Stücke Kuchen. Christoph hat nur ein Brot gekauft, hätte aber für 60 Cent weniger auch 2 Brötchen kaufen können. Daniela behauptet, sie habe für 9 Brötchen und ein Stück Kuchen 4 EUR bezahlt.

(a) Bestimmen Sie anhand der Aussagen von Anton, Berta und Christoph die Preise für Brot, Brötchen und Kuchen.

(b) Überprüfen Sie die Behauptung von Daniela anhand der unter (a) berechneten Werte.

4.) Ein Fahrradfahrer fährt 5 km in Richtung Norden und danach $2\sqrt{2}$ km in Richtung Nordosten. Nach einer kurzen Pause fährt er 4 km in Richtung Westen. Dort muss er einen Berg umfahren, indem er zuerst 3 km Richtung Süden fährt, um anschließend wieder $\sqrt{2}$ km nach Nordwesten zu fahren. Sein Ziel liegt $6\sqrt{2}$ km nordwestlich von seinem Startpunkt.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Wie viele km ist der Radfahrer bisher insgesamt gefahren?

(c) Wie weit ist er noch von seinem Ziel entfernt (Luftlinie)?

5.) Sind die 3 Funktionen $1, \cos(x), \sin(\pi + x)$ linear unabhängig für $x \in [0, 2\pi[$?

6.) Sei

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y + 4z \\ 3x + 7z \\ -6y + 5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für die obige Abbildung die Abbildungsmatrix an

(b) Man bestimme den Kern von f und seine Dimension

(c) Man bestimme die Dimension des Bildes von f

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an

7.) Gegeben seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Basis der Vektoren

(b) Erweitern Sie die Vektoren um einen Vektor v_5, so dass ihre lineare Hülle der $\mathbb{R}^3$ ist

8.) Der lineare Raum der Polynome vom Grade $\leq n$ ist gegeben durch

$$P_n = \{p; p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k$$

ein Skalarprodukt auf P_n gegeben ist.

9.) (a) Benennen Sie die Gruppenaxiome.

(b) Ist $\mathbb{N}_{\geq 0}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = \ |a-b|$$

eine abelsche (d.h. kommutative) Gruppe? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe der Gruppenaxiome.

10.) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A' des Punktes

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

an der Geraden g (siehe Zeichnung):

$$g : X = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$