

Lineare Algebra I und II

Die lineare Algebra befasst sich traditionell mit dem Lösen von Gleichungssystemen, der analytischen Beschreibung von Geraden, Ebenen, Kreisen, Kegelschnitten, Kugeln usw. ("analytische Geometrie") und der Vektorrechnung. Mit dem Entstehen der modernen Algebra sind diese zunächst ziemlich getrennten Gebiete zusammen gewachsen und bilden nun eine Einheit, die „Lineare Algebra“.

Die Lineare Algebra ist ein Teilgebiet der Algebra, die aus der Frage entstand, wie man Gleichungen höheren Grades lösen könne. Die Basis der (modernen) Algebra sind Mengen, auf denen ein, zwei oder drei Verknüpfungen definiert sind, die bestimmten Eigenschaften genügen. Auf diese Weise werden abstrakt Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume und Algebren eingeführt und deren grundlegenden Eigenschaften untersucht. Auch wenn diese Begriffe zunächst aus innermathematischen Fragestellungen entstanden, so haben sie eine große Bedeutung außerhalb, etwa in Kristallographie, Atom- und Elementarteilchenphysik.

Die zentralen Begriffe der (modernen) linearen Algebra sind Vektorraum, Basis und lineare Abbildung. Da alle drei Begriffe auf "unendlich viele Dimensionen" ausdehnbar sind, wird der Übergang zur Analysis fließend: Differentiation und Integration lassen sich als lineare Abbildung auffassen, Differential- und Integralgleichungen als (unendlich-dimensionale) Gleichungen. Die auf diese Weise im 20. Jh. entstandene "Funktionalanalysis" hat sich – da sie viele früher getrennte Gebiete umfasst – zu dem wohl wichtigsten Gebiet der modernen Mathematik entwickelt; es gibt zahlreiche Anwendungen in Numerik, Optimierung und in der theoretischen Physik. Ideen der Algebra und linearen Algebra fließen auch in die theoretische Informatik ein, etwa in die Kryptographie und die Theorie der formalen Sprachen und Automaten.

Unterrichtsdauer: 4 Unterrichtseinheiten pro Woche

Unterrichtsinhalte

1. Analytische Geometrie

- 1.1 Koordinatensysteme in Ebene und Raum
- 1.2 Analytische Darstellung von Geraden und Ebenen
- 1.3 Quadratische Formen und Hauptachsentransformationen
- 1.4 Der n-dimensionale Punktraum

2. Elementare Vektorrechnung

- 2.1 Der elementare Vektorbegriff aus Geometrie und Physik
- 2.2 Vektorrechnung in der Ebene
- 2.3 Vektorrechnung im Raum
- 2.4 (euklidisches) Skalarprodukt
- 2.5 Vektorprodukt, Spatprodukt im dreidimensionalen Raum
- 2.6 Determinanten und Gleichungssysteme in zwei oder drei Dimensionen

3. Mengen mit Verknüpfungen

- 3.1 Mengen, Relationen, Äquivalenzklassen, Metriken
- 3.2 Mengen mit einer Verknüpfung:

- 3.2.1 Halbgruppen und Gruppen
- 3.2.2 Untergruppen, Homomorphismen
- 3.2.3 Permutationsgruppen
- 3.3 Mengen mit zwei Verknüpfungen
- 3.3.1 Ringe
- 3.3.2 Körper
- 3.3.3 Die Körper der rationalen, reellen und komplexen Zahlen

4. Abstrakte Vektorräume

- 4.1 Die Definition eines Vektorraumes. Eigenschaften
- 4.2 Punkt- und Funktionenräume
- 4.3 (Lineare) Unterräume
- 4.4 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit
- 4.5 Lineare Hülle und Basis. Komponentendarstellung von Vektoren
- 4.6 Normierte Vektorräume. Approximationsbegriff
- 4.7 Vektorräume mit Skalarprodukt. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
- 4.8 Orthogonale Basen. Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

5. Lineare Abbildungen

- 5.1 Vektorfunktionen. Vektorfelder
- 5.2 Definition einer linearen Abbildung
- 5.3 Vektorraum-Homomorphismen. Kern und Bild einer linearen Abbildung
- 5.4 Die Algebra linearer Abbildungen
- 5.5 Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen

6. Matrizenrechnung

- 6.1 Matrizenoperationen als Darstellung von Operationen mit linearen Abbildungen
- 6.2 Eigenschaften der Matrizenmultiplikation. Inverse einer Matrix
- 6.3 Vektorraum von Matrizen. Ring quadratischer Matrizen
- 6.4 Matrizen-Transposition. Zeilenvektoren. Dualräume
- 6.5 Spezielle Matrizen: Dreiecksmatrizen, symmetrische und orthogonale Matrizen
- 6.6 Rang einer Matrix. Äquivalenz von Matrizen

7. Determinanten

- 7.1 Determinante als Volumen
- 7.2 Allgemeine Eigenschaften einer Determinante. Determinante als alternierende Multilinearform
- 7.3 Entwicklungssätze. Effiziente Berechnungsmöglichkeiten
- 7.4 Matrix-Inversion durch Determinanten. Allgemeine Cramersche Regel

8. Lineare Gleichungssysteme

- 8.1 Vektor- und Matrix-Schreibweise eines linearen Gleichungssystems

8.2 Homogenes Gleichungssystem. Lösungsmannigfaltigkeit eines lin. Gls.

8.3 Der Gauß-Algorithmus im allgemeinen Fall

8.4 Matrizen-Inversion mit Gauß-Algorithmus

8.5 Geometrische Interpretation eines linearen Gleichungssystems

9. Eigenwerte und Eigenvektoren

9.1 Problemstellung und Definition

9.2 Charakteristisches Polynom. Direkte Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

9.3 Diagonalisierbare Matrizen. Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

evtl. Grundbegriffe von CAD (computer aided design)