Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. P. Jansen, ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Aufgaben zur Linearen Algebra I und II 7.7.2006

Punkte

1. Peter, Paul und Mary kaufen beim Bäcker ein:
   Peter kauft 1 Brötchen, 2 Hörnchen und 1 Graubrot und bezahlt 5 EURO
   Paul kauft 3 Brötchen,1 Hörnchen und ebenfalls ein Graubrot und bezahlt 4,80 EURO und
   Mary kauft 2 Hörnchen, 1 Graubrot und 1 Baguette für 7 EURO.
   Die Freunde versuchen später die Einzelpreise zu rekonstruieren. Helfen Sie ihnen durch einen mathematischen Ansatz. Ermitteln Sie die allgemeine Lösungsmenge und darin die möglichen Preise (Intervalle!) für jeden Artikel.

2. Die Ebene E geht durch den Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und schneidet die (x,y)-Ebene in der Geraden $x + y = 48$.
   Wie lautet die Gleichung der Ebene in Normalenform.

3. Bestimmen Sie α so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^2+3 \\ 3\alpha+6 \end{pmatrix}$ Element des Vektorraums $span(\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix})$ ist.

4. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{pmatrix}$$

orthogonal.

5. Ein Draht sei straff zwischen zwei Punkten gespannt, die bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Koordinaten (10,10,10) bzw. (10,20,30) haben. Wie weit ist der Punkt mit den Koordinaten (0,10,10) von dem Draht entfernt?

6. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$; zeigen Sie , dass dann $a + b + c$ Eigenwert von A ist.

7. Man bestimme den Abstand der Geraden

$$G1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $G2$, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ geht.

8. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ auf; berechnen Sie eine Orthonormalbasis, die den gleichen Raum aufspannt.

9. Sei $S = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ fest. Man stelle eine Vermutung für S^n auf und beweise diese mit vollständiger Induktion.

10. Man bestimme den Rang der Matrix A in Abhängigkeit des Parameters a, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 & a \\ 1 & 2 & -a^2 - 3a & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Gilt für allgemeine quadratische Matrizen gleicher Dimension die Gleichung

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \quad ?$$

Geben Sie einen Beweis oder ein möglichst einfaches Gegenbeispiel an.

12. Ermitteln Sie das Ausgleichspolynom zweiten Grades zu den Punkten

$$(-2, 10) \quad (-1, 3) \quad (1, 5) \quad (2, 12)$$

Stellen Sie die Normalgleichungen auf und lösen Sie diese. Fertigen Sie eine Skizze der Punkte und der Lösungskurve.

13. Was kann man über die Eigenwerte und Eigenvektoren von B sagen, wenn $B = A + 7I$ ist und man die Eigenwerte und Eigenvektoren von A kennt?

14. Eine Matrix A besitzt die einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

    Berechnen Sie die Matrix A.

15. Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 11x + 10y &= 3 \\ 7x + 12y &= 5 \end{aligned}$$

(a) mit dem Gauß-Verfahren,

(b) mit der Cramerschen Regel,

(c) mit Matrixinversion.

16. Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von α:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 12 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R}\}$$

eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet. Hinweis: Benutzen Sie die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \end{aligned}$$

18. Gegeben sind die 4 Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Wie lautet eine Gleichung der Ebene, in der alle vier Punkte liegen? Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine implizite (parameterlose) Darstellung an.

(b) Bestimmen Sie den kleinsten Abstand der Ebene zum Nullpunkt.