

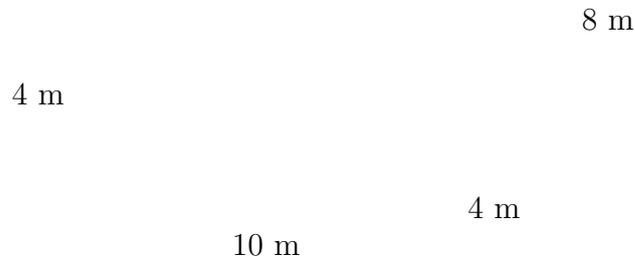
Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra

24.9.2008

1.) Zeigen Sie, dass für alle Orthogonalmatrizen A gilt $|\det(A)| = 1$.

Tipp: Starten Sie mit der Berechnung von $\det(A \cdot A^T)$.

- 2.) Das abgebildete Haus hat die Ausmaße: 10 m in x-Richtung, 4 m in y-Richtung und zwischen 4 und 8 m in z-Richtung (siehe Abbildung). Genau in der Mitte seines Daches steht eine 1 m hohe Antenne. Auf das Haus fällt (paralleles) Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\vec{v} = (1, -1, -3)$.
- (a) Berechnen Sie Anfangs- und Endpunkt der Antenne. Der Koordinatenursprung liegt in der linken unteren Hausecke.
 - (b) Berechnen Sie den Schattenpunkt der Antennenspitze auf der Dachoberfläche.
 - (c) Wie lang ist der Schatten der Antenne auf dem Dach?



3.) Zeigen Sie, dass die Wahrheitswerte w und f mit der XOR-Verknüpfung

XOR	w	f
w	f	w
f	w	f

eine Gruppe bilden.

4.) Sei

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -3x + z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

- (a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.
- (b) Man bestimme Kern von F und seine Dimension.
- (c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\text{Bild}(F))$.
- (d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

5.) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6.) Gegeben seien zwei Punkte $P = (3, 3, 2)$ und $Q = (0, 2, -2)$ und die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_1 durch den Punkt P in Richtung von \vec{a} und der Geraden g_2 durch den Punkt Q in Richtung von \vec{b} .
- (b) Schneiden sich die beiden Geraden? Sind sie parallel? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.
- (c) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der beiden Geraden.

7.) Für welche reellen Zahlen a ist die folgende Matrix A invertierbar,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

8.) Gegeben ist

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & -1-t \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_t = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Man zeige, dass der Vektor \vec{x}_t Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

Man bestimme auch den zweiten Eigenwert.

9.) Orthonormieren Sie nach dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10.) Welche der folgenden Funktionen sind linear abhängig bzw. linear unabhängig?

(a) $f_1(x) = 3 + 2x + x^2, f_2(x) = -2 + x + x^2, f_3(x) = -7 + x^2$

(b) $f_1(x) = 1 + 2x + x^2, f_2(x) = -3 + 5x + 4x^2, f_3(x) = -2 + 8x + 5x^2$