Yvonne Nix, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Folgen und Konvergenz

1.) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $< a_n >$:

a) $a_n = \frac{-7n^2+5n-3}{2n^2-n+79}$
b) $a_n = \frac{n^3+n^2+7}{7+4n^2-n^4}$
c) $a_n = \frac{n+n^2+11}{2n-7}$
d) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
e) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3$
f) $a_n = n\left(1 - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\right)$

2.) Sei $a_n = \frac{5n^2+n-5}{7n^2-5n+4}$

a) Erraten Sie $a := \lim_{n\to\infty} a_n$
b) Mit Hilfe der Grenzwertdefinition überprüfen Sie, ob der erratene Wert wirklich $\lim_{n\to\infty} a_n$ ist.
c) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$ ausführlich mit Hilfe der Grenzwertsätze.

3.) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} a_n$ (falls dieser Grenzwert existiert) für:

a) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}}$
b) $a_n = \left(1-\frac{4}{3n^2}\right)^{20}$
c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{7}{n}$
d) $a_n = \frac{1}{n^{k-2}} \quad (k \in \mathbb{N})$

4.) Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Monotonie und Beschränktheit:

a) $a_n = \binom{n}{5}$
b) $a_n = \frac{n+3}{n^2+3n-5}$
c) $a_n = \frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p}\ , \quad p \in \mathbb{N}$
d) $a_n = 3n - \sqrt{9n^2+1}$

5.) Sei $a_n = \frac{2n}{(n-5)^2+1}$. Untersuchen Sie $< a_n >$ auf Monotonie und Beschränktheit.

6.) Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

auf Monotonie und Beschränktheit.
Hinweis: Berechnen Sie $a_{n+1} - a_n$

7.) Man untersuche die Folgen $< a_n >$ und $< b_n >$ auf Konvergenz:

a) $a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$

b) $b_0 = 1, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \sqrt{b_n}$

8.) Zeigen Sie die Konvergenz der rekursiven Folge und berechnen Sie den Grenzwert zu

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{8a_n - 15} \\ a_0 &= 4 \end{aligned}$$

9.) Untersuchen Sie die gegebene Folge auf Konvergenz $(n \geq 1)$:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2}$$

10.) Sei $< a_n >$ gegeben durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}.$$

Zeigen Sie

a) $< a_n >$ ist nach oben beschränkt durch $\sqrt{2}$

b) $< a_n >$ ist monoton steigend.