

Übungsblatt 1

12.10.2016

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & & = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 5 \\ -x_2 + ax_3 & = & b \end{array}$$

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ existiert keine bzw. eine bzw. unendlich viele Lösungen?
Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $a = \frac{2}{5}$ und $b = \frac{12}{5}$.

2.) **Typische IHK-Aufgabe.** Eine Getränkefirma hat 2 Orangensaftsorten im Angebot. Die Sorte „fruchtig“ besteht aus 70% Orangensaft, 10% Zucker und 20% Wasser. Die Sorte „mild“ besteht aus 50% Orangensaft, 20% Zucker und 30% Wasser. Die Firma will eine neue Sorte „light“ einführen, die aus 22% Orangensaft, 7% Zucker und 71% Wasser besteht. Diese Sorte möchte die Firma aus den Sorten A und B mischen, wobei sie beliebig mit Wasser verdünnen kann. Welche Anteile muß die Firma verwenden?

3.) Wieviele und welche Lösungen hat das folgende Gleichungssystem? Lösen Sie dieses mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 7x_4 & = & 39 \\ 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 7x_4 & = & 42 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 14x_4 & = & 3 \end{array}$$

4.) Betrachten Sie das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 - 2x_4 & = & -1 \\ -1x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 8x_4 & = & -5 \end{array}$$

(a) Beurteilen Sie zunächst ohne Rechnung, ob das LGS

- eindeutig lösbar
- lösbar mit unendlich vielen Lösungen
- unlösbar

sein kann.

(b) Berechnen Sie welcher der drei oben genannten Fälle zutrifft.

5.) Bernie und Ert haben ein „Lineares Gleichungssystem“ gelöst und folgende Lösungen erhalten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die beiden behaupten beide korrekt gerechnet zu haben, wundern sich aber über die unterschiedlich wirkenden Ergebnisse.

- (a) Zeigen Sie, dass beide Lösungsmengen identisch sind und somit beide korrekt gerechnet haben können.
- (b) Stellen Sie ein „Lineares Gleichungssystem“ auf, das obige Lösungsmenge(n) besitzt.

Hausaufgaben (Abgabe bis 18.10.2016)

- 6.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem a) keine, b) genau eine oder c) unendlich viele Lösungen? Es ist der Gauß-Algorithmus zu benutzen!

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 4y & + & (3t^2 - 1)z & = & (t - 1) \end{array}$$

- 7.) Gegeben ist das folgende Quadrat

x_1	x_2
x_3	x_4

mit 4 unbekanntenen Werten x_k mit $k = 1, \dots, 4$. Bekannt sind nur die beiden Zeilensummen und die beiden Spaltensummen.

- (a) Stellen Sie fest, ob Sie mithilfe dieser 4 Bedingungen die 4 unbekanntenen Werte x_k mit $k = 1, \dots, 4$ eindeutig bestimmen können.
Hinweis: Ordnen Sie die 4 Gleichungen so, dass Sie möglichst wenige Umformungen bei Anwendung des Gauß-Algorithmus vornehmen müssen.
- (b) Gegeben sind die 4 Werte der Zeilensummen beginnend von oben nach unten und der Spaltensummen beginnend von links nach rechts durch 10, 7, 5 und 12. Außerdem ist die Summe der Diagonalelemente (d.h. $x_1 + x_4$) gleich 4. Bestimmen Sie jetzt die unbekanntenen Werte x_1 bis x_4 , falls dies (eindeutig) möglich ist.
- 8.) Lösen Sie das folgenden Gleichungssystem, wobei rechts vom senkrechten Strich jeweils verschiedene rechte Seiten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stehen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Benutzen Sie dabei den erweiterten Gauß-Algorithmus so, dass das Ergebnis folgende Form hat:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 1 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 1 & X & X & X \end{array} \right).$$

Das Symbol X steht hier für einen zu berechnenden Wert.