Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 12 — 04.01.2017

Präsenzaufgaben

1.) Sind die Polynome

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 7$$
$$f_2(x) = -3x^2 + x + 4$$
$$f_3(x) = -6x^2 + 13x - 5$$

linear unabhängig?

2.) Berechnen Sie das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

für folgende Vektoren aus dem P_3:

(a) $p(x) = 1 - x + x^2 + 5x^3$ und $q(x) = x - 3x^2$

(b) $p(x) = x - 5x^3$ und $q(x) = 2 + 8x^2$

3.) $v_1, \ldots, v_n$ mit $v_i \neq 0$ seien n paarweise orthogonale Vektoren, d.h.

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad \forall\, i \neq j.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

Tipp: Klären Sie zunächst, was passiert, wenn man eine Linearkombination

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

skalar mit einem v_k für $1 \leq k \leq n$ multipliziert.

4.) p und q seien reelle Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{2} p(x_k) \cdot q(x_k)$$

wobei x_0, x_1, x_2 paarweise verschiedene reelle Zahlen sind, ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum P_2 der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 gegeben ist.

Beispiel: $p = 5x + 2$, $q = x^2 + 3$; wähle $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
$\Rightarrow \langle p, q \rangle = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 12 \cdot 7 = 118$

Hinweis: Zum Beweis von SP4 benötigen Sie die Bedingung, dass x_0, x_1 und x_2 paarweise verschieden sind.

5.) Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_0, f_1, f_2\}$, gegeben durch

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = (x - x_0), \quad f_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

eine Basis im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 bilden.

Hausaufgaben (Abgabe bis 10.01.2017)

6.) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom möglichst niedrigen Grades, das an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A = (-2/3), \quad B = (-1/2), \quad C = (2/5).$$

Stellen Sie das Polynom auch in seiner Faktorzerlegung dar.

7.) Gegeben sei die Basis $B = \{1, x^2, x^4\}$ des Vektorraums V der achsensymmetrischen Polynome maximal 4.Grades.

(a) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von B einen Untervektorraum vom Vektorraum P_4 der Polynome vom Grad 4 bildet.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf Lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned} 3x^4 - 7x^2 + 2 \\ -x^4 + 2x^2 - 1 \\ 4x^4 + 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

8.) Zeigen Sie, dass durch $\langle U, V \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_3 + u_3 v_2 + u_4 v_4$ für

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

kein Skalarprodukt definiert wird.

9.) Ist durch $\langle z, w \rangle = z \cdot \overline{w}; z, w \in \mathbb{C}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ gegeben?