Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 2 10./11.04.2017

Präsenzaufgaben

1.) Es sei P^n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \begin{cases} P^n \to P^{n-1} & : n \in \mathbb{N} \\ P^0 \to P^0 & : n = 0, \end{cases}$$

für die Differentiation $f(p) = p'$ eine lineare Abbildung ist. Untersuchen Sie die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität. Wie sieht das Bild und der Kern dieser Abbildung aus?

2.) Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$
Entscheiden Sie ob eine solche Abbildung folgende Eigenschaften erfüllen kann?

(a) $dim(Kern(f)) = 1$ und $dim(Bild(f)) = 3$

(b) $dim(Kern(f)) = 3$ und $dim(Bild(f)) = 2$

(c) $dim(Kern(f)) = 3$ und $dim(Bild(f)) = 1$

Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel an.

3.) (a) Selbstlernphase: Lesen und verstehen Sie im Script Satz 4.38 und Beispiel 4.39.

(b) Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Geben Sie gegebenenfalls die zugehörige Matrix an. Bestimmen Sie jeweils den Kern (auch für die nicht linearen Abbildungen).

i. $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$ ii. $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

iii. $f_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$ iv. $f_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

4.) Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_4 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Wie sieht die dazugehörige Matrix aus?

(b) Bestimmen Sie den Kern und die Dimension des Kerns von f.

(c) Geben Sie die Dimension des Bild von f an.

5.) Ein lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}(x, y, z)$.

Hausaufgaben (Abgabe bis 17.04.2017)

6.) Für eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sind folgende Einzelabbildungen bekannt:

$$\begin{aligned} \Phi((1,0,0)^T) &= (-1,0)^T \\ \Phi((-1,0,1)^T) &= (3,1)^T \\ \Phi((0,2,-1)^T) &= (-2,1)^T \\ \Phi((0,2,0)^T) &= (0,2)^T \end{aligned}$$

(a) Wie viele der obigen vier Angaben benötigen Sie zur Bestimmung der Abbildungsmatrix?

(b) Bestimmen Sie mit ausreichend vielen dieser Angaben die zugehörige Abbildungsmatrix

(c) Überprüfen Sie ggf., ob alle vier Angaben konsistent sind.

7.) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck $\lambda\vec{x}$ kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

(a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$

(b) $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda\vec{x}$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen? Im Fall a) kann damit die Multiplikation eines Vektors mit einem Faktor als Matrixmultiplikation interpretiert werden.

8.) Versuchen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$$

aufzustellen und zeigen Sie anschließend, dass es sich um keine lineare Abbildung handelt.

9.) Sei $0 \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung

$$S(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0$. Hierbei stehen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt und $|| \cdot ||$ für die euklidische Norm.

(a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall $n = 2$, dass es sich in der Tat bei S um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall $n = 2$?).

(b) Zeigen Sie: S ist linear.

(c) Stellen Sie eine Vermutung auf, welches die Umkehrabbildung von S ist. Beweisen Sie Ihre Vermutung und somit auch, dass S ein Isomorphismus ist.