Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

# Übungsblatt 5 — 02.05.2017

## Präsenzaufgaben

1.) Es sind folgende Abbildungsmatrizen gegeben:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Matrix $A_\phi$ wird ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\phi$ gedreht, die Matrix $B$ spiegelt selbigen an der $x$-Achse.

(a) Veranschaulichen Sie die Behauptungen am Beispiel des Vektors $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$, wobei $A = A_{\frac{\pi}{2}}$, indem Sie den Vektor selber und dessen Abbildungen $f_A(\vec{x}_0) = A \cdot \vec{x}_0$ und $f_B(\vec{x}_0) = B \cdot \vec{x}_0$ in ein Koordinatensystem einzeichnen.

(b) Zeichnen Sie auch die hintereinander geschalteten Abbildungen $f_{AB}(\vec{x}_0) = A \cdot B \cdot \vec{x}_0$ und $f_{BA}(\vec{x}_0) = B \cdot A \cdot \vec{x}_0$ von $\vec{x}_0$.

(c) Wie sehen die Umkehrabbildungen zu $f_A(\vec{x})$ und $f_B(\vec{x})$ aus? Stellen Sie dazu die Abbildungenmatrizen $A^{-1}$ und $B^{-1}$ auf.

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen zu den Umkehrabbildungen $f_{AB}^{-1}$ und $f_{BA}^{-1}$.

(e) Verifizieren Sie die Ergebnisse aus b) und d), indem Sie die Vektoren $f_{AB}(\vec{x}_0)$ und $f_{BA}(\vec{x}_0)$, die Sie zeichnerisch bei b) erhalten haben mit den Matrizen aus d) multiplizieren.

2.) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus' die Inverse zu folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

**Hausaufgaben (Abgabe bis 07.05.2017)**

3.) (a) Es sei $A$ eine $2 \times 2$-Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie dazu zwei Rechenwege:

i. Überprüfen Sie, dass das Produkt von $A$ und $A^{-1}$ die Einheitsmatrix gibt.

ii. Berechnen Sie die Inverse von $A$ nach dem Gauß-Verfahren.

(b) Gegeben ist die $2 \times 2$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $\alpha$ existiert eine $2 \times 2$-Matrix $X$, die die Gleichung $A \cdot X = E$ erfüllt?

4.) Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrizen, falls diese existieren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 24 & 16 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 13 & 11 & 8 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 18 & 2 & 18 & 12 & 2 & 7 \\ 1 & 10 & 13 & 21 & 8 & 24 & 16 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 13 & 2 & 24 & 17 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.) Für welche reellen Zahlen $a$ ist die folgende Matrix $A$ invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.) Berechnen Sie das Produkt der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Blockmultiplikation. Teilen Sie dazu die Matrizen A und B in Blöcke auf:

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

Dabei werden die Blöcke so angelegt:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} ER & ES + FT \\ 0 & GT \end{pmatrix}.$$