Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2017

Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 6 08/09.05.2017

Präsenzaufgaben

1.) Gebeben sei

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

B sei die im Uhrzeigersinn um $45°$ gedrehte Basis

(a) Bestimmen Sie die Basisvektoren von B.

(b) Berechnen Sie jeweils die Koordinaten des Vektors $(4,5)^T$ bezüglich der Basen A und B.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen, die die Koordinaten bezüglich A in Koordinaten bezüglich B umrechnen beziehungsweise umgekehrt. Verifizieren Sie die Richtigkeit mit Hilfe des Beispiels aus b)

2.) $A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $A' = \{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\}$ und $A'' = \{\vec{a}''_1, \vec{a}''_2, \vec{a}''_3\}$ bilden mit den kanonischen Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sowie

$$\vec{a}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\vec{a}''_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}''_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}''_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils Basen des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_A^{A'}, T_A^{A''}$ sowie $T_{A'}^{A}, T_{A''}^{A}$.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{A''}^{A'}$ sowie $T_{A'}^{A''}$.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $(1,0,1)$ bzgl. der Basen A' und A'' unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung benutzten Schreibweise.

3.) Die Kavalierprojektion dient dazu, dreidimensionale Objekte zweidimensional darzustellen. Die zugehörige Projektionsmatrix bzgl. der kanonischen Basen A und B lautet

$$M_B^A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ spannen einen Spat auf und bilden die Basis A'.

(a) Zeichnen Sie den Spat.

(b) Bestimmen Sie alle acht Eckpunkte des Spates sowie dessen Volumen.

(c) Projizieren Sie alle Eckpunkte des Spates mit Hilfe der Kavalierprojektion in die $\mathbb{R}^2$-Ebene.

(d) Neben der kanonischen Basis B gibt es im $\mathbb{R}^2$ auch noch die Basis $B' = \left\{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2\right\}$ mit

$$\vec{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{B'}^{A'}$ bzgl. der Basen A' und B'.

4.) Gegeben seien folgende Basen

$$A = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$B = \left\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für die durch $F(\vec{a_1}) = 2\vec{b_1} + \vec{b_2}$, $F(\vec{a_2}) = \vec{b_1}$, $F(\vec{a_3}) = \vec{b_3}$ gegebene lineare Abbildung bestimmen Sie die folgenden Abbildungsmatrizen:

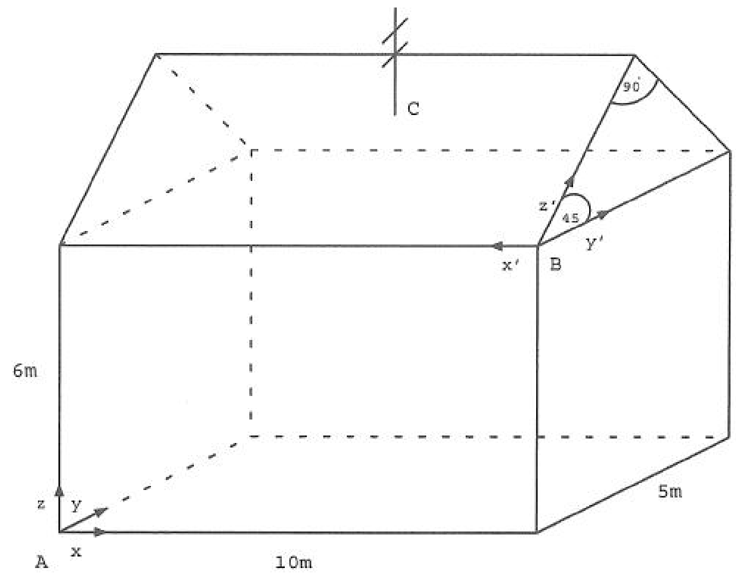
(a) bzgl. der Basen A (Definitionsbereich) und B (Wertebereich)

(b) bzgl. der Basis A im Definitions- und Wertebereich

(c) bzgl. der kanonischen Basis im Definitions- und Wertebereich

Hausaufgaben (Abgabe bis 14.05.2017)

5.) **Typische IHK-Aufgabe.** Ein Architekt plant, auf dem Dach eines Hauses eine Antenne anzubringen (siehe Skizze). Von seinem Bezugspunkt A aus gesehen soll sie senkrecht über der Stelle, die auf der Grundfläche des Hauses 5m nach rechts (x-Richtung) und 2m nach hinten (y-Richtung) liegt, auf dem Dach angebracht werden.



(a) Berechnen Sie den Anfangspunkt der Antenne auf dem Dach vom Bezugspunkt A aus gesehen.

(b) Der Dachdecker, der an dieser Stelle Dachziegel weglassen muss, nimmt als Bezugssystem die rechte untere Ecke des Daches B und als Basisvektoren die eingezeichneten Richtungsvektoren x', y' und z' (der Länge 1). Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C bzgl. seines Koordinatensystems.

(c) Wie lauten die Koordinaten des Bezugspunktes A des Architekten im Koordinatensystem des Dachdeckers?

(d) Wie muss die Tranformation (Matrix und Verschiebungsvektor) aussehen, die einen beliebigen Punkt des Hauses aus dem Koordinatensystem des Dachdeckers in das des Architekten umrechnet? Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie das Ergebnis von (b) in das Ergebnis von (a) umrechnen.

(e) Wie muss die Tranformation (Matrix und Verschiebungsvektor) aussehen, die einen beliebigen Punkt des Hauses aus dem Koordinatensystem des Architekten in das des Dachdeckers umrechnet?

6.) Projektionsverfahren dienen dazu, dreidimensionale Objekte zweidimensional dazustellen. Ein bekanntes Projektionsverfahren ist die Kavalierprojektion. Eine mögliche Projektionsmatrix lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Tranformieren Sie die Eckpuntke des Hauses aus Aufgabe 5 in die zweidimensionale Projektion.
Zeichnen Sie die transformierten Punkte und die entsprechenden Verbindungslinien.

7.) Gegeben Sei die Basis $B = \{1, x, x^2, x^3\}$. Stellen Sie die Transformationsmatrix des Basiswechsels von B nach C auf mit

$$C = \{1, x - c, (x - c)^2, (x - c)^3\}.$$