Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 7 — 15/16.05.2017

Präsenzaufgaben

1.) Die Determinante der folgenden Matrix A_1 ist:

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = d.$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $\det(A_1)$ die Determinaten der folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $c, d \in \mathbb{R}$:

(a) $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c \cdot a_{31} & c \cdot a_{32} & c \cdot a_{33} & c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(b) $A_3 = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + a_{41} & a_{12} + a_{42} & a_{13} + a_{43} & a_{14} + a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(c) $A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(d) $A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} + c \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + c \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + c \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + c \cdot a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(e) $A_6 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} + c \cdot a_{31} & a_{12} + c \cdot a_{32} & a_{13} + c \cdot a_{33} & a_{14} + c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(f) $A_7 = (A_1)^{-1}$

2.) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 26. \end{pmatrix}$$

Bringen Sie die Matrix A auf obere Dreiecksgestalt, indem Sie sie von links mit den für die Zeilenumformungen erforderlichen Elementarmatrizen multiplizieren. Multiplizieren Sie auch die rechte Seite b von links mit diesen Elementarmatrizen und lösen Sie anschließend das Gleichungssystem durch Rückwärtssubstitution.

3.) Welche der folgenden Matrizen sind Elementarmatrizen? Geben Sie die Zeilenoperationen an, die einer Multiplikation von links mit den folgenden Matrizen entsprechen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.) Selbstlernphase zum Thema Eigenschaften der Determinante:
Lesen und verstehen Sie die Beweise zur Bemerkung 5.11 und zum Satz 5.15 im Skript und beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Zu Bemerkung 5.11: Erklären Sie, warum sich $2k-1$ Vertauschungen ergeben.

(b) Zu Satz 5.15: Erklären Sie, warum L_B nur dann vollen Rang besitzen kann, falls alle Hauptdiagonalelemente von B ungleich 0 sind.

5.) Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 512 & 17 & 0 & 87 & 17 \\ 17 & 77 & 2 & 1 & 77 \\ 512 & 6 & 0 & 51 & 6 \\ 0 & 47 & 5 & 101 & 47 \\ 99 & 310 & 11 & 17 & 310 \end{pmatrix}$$

bekannt. Berechnen Sie die Determinanten:

(a) $\det(A)$ (b) $\det(B)$ (c) $\det(C)$ (d) $\det(AB)$
(e) $\det((BA)^{-1})$.

Hinweis: $\det(C)$ kann einfach bestimmt werden und muss nicht berechnet werden.

Hausaufgaben (Abgabe bis 21.05.2017)

6.) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -2 & 1 \\ -17 & 9 & -6 & 117 \\ 4 & 2 & -8 & 38 \\ 3 & 17 & 34 & -217 \end{pmatrix}$$

unter der Annahme, dass die Determinanten der folgenden Matrizen bekannt sind,

$$B = \begin{pmatrix} 17 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 38 & -4 & 3 \\ -17 & 117 & -3 & 4 \\ 3 & -217 & 17 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 17 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 & 38 \\ -17 & 5 & -3 & 117 \\ 3 & 0 & 17 & -217 \end{pmatrix}$$

wobei $\det(B) = x$ und $\det(C) = y$.

7.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Bestimmen Sie Elementarmatrizen M_1 und M_2 mit $M_1 M_2 A = E$.

(b) Stellen Sie A^{-1} als Produkt zweier Elementarmatrizen dar.

(c) Schreiben Sie A als Produkt von zwei Elementarmatrizen.

8.) Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^N = \begin{pmatrix} i & f & c \\ h & e & b \\ g & d & a \end{pmatrix}$$

wobei A^N durch Spiegelung der Matrix A an ihrer Nebendiagonalen (c, e, g) entstanden ist. Bestimmen Sie $\det(A^N)$ mit Hilfe von $\det(A)$ durch Transponieren, Zeilen- und Spaltenvertauschungen von A.

9.) Sei $det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 5$. Welchen Wert haben folgende Determinanten?

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$