Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2017

Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 12 — 19/20.06.2017

Präsenzaufgaben

1.) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist und bestimmen Sie ihre Inverse.

2.) Die Abbildung f_A dreht einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ innerhalb der x-z-Ebene um einen Winkel ϕ. Die Abbildung f_B spiegelt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ an der x-Achse.

(a) Stellen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen A und B auf.

(b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der hintereinander geschalteten Abbildungen $f_B \circ f_A$ auf.

(c) Bestimmen Sie auch die zugehörige Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung $(f_B \circ f_A)^{-1}$.

3.) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert der Matrix A^{-1} zum Eigenvektor $\vec{x}$ ist, falls λ Eigenwert der Matrix A zu selbigem Eigenvektor ist.

4.) (a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2\frac{uu^T}{u^Tu}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.
Hinweis: Berechnen Sie nicht die Komponenten von H_n.

(b) Verifizieren Sie das Ergebnis für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Hausaufgaben (Abgabe bis 25.06.2017)

5.) (a) Welche speziellen Eigenschaften besitzt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}?$$

Hinweis: Es sind zwei Eigenschaften gesucht.

(b) Bestimmen Sie anschließend die inverse Matrix A^{-1}. Dies ist mit den speziellen Eigenschaften von A einfach. Was kann man außerdem über den Wert von det(A) sagen?

6.) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung, deren Abbildungsmatrix orthogonal ist, den Winkel zwischen Vektoren unverändert lässt. Zeigen Sie zunächst am Beispiel

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = A\vec{x},$$

dass gilt:

$$\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = \measuredangle(A\vec{x}, A\vec{y})$$

7.) Eine Lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ hat bzgl. der kanonischen Basen E die Abbildungsmatrix

$$F_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie die Transformationsmatrizen auf, die Vektoren aus der Basis

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw.

$$Z = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

in die kanonische Basis transformiert.

(b) Bestimmen Sie ohne aufwendige Rechnung die Transformationsmatrizen, die Vektoren aus der kanonischen Basis in die Basis D bzw. Z transformiert.

(c) Schreiben Sie auf, wie man die Abbildungsmatrix F_Z^D zu Φ bzgl. der Basen D und Z berechnen kann ohne die (aufwendige) Rechnung durchzuführen.

8.) Ermitteln Sie das Ausgleichpolynom zweiten Grades zu den Punkten

$$(-2; 10), (-1; 3), (1; 5), (2; 12).$$

Stellen Sie die Normalgleichung auf und lösen Sie diese. Fertigen Sie eine Skizze der Punkte und der Lösungskurve an.