FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, WS 2013/2014, am 24.09.2013

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(12)
Aufgabe 6)		(12)
Aufgabe 7)		(12)
Aufgabe 8)		(16)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Matrizen A, B positiv definit bzw. negativ definit?

Aufgabe 2

a) Wann ist eine quadratische Matrix orthogonal?

b) Ergänzen Sie in der Matrix A die fehlenden Elemente so, dass eine orthogonale Matrix entsteht. Es ist nur eine Lösung gesucht.

$$A = \begin{pmatrix} . & . & 1/\sqrt{2} \\ . & . & 1/\sqrt{2} \\ . & 0 & . \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

In einem Tierpark befinden sich vier Vogelkäfige an den Positionen

$$(1,1)^T, (2,0)^T, (3,1)^T \quad \text{und} \quad (6,2)^T.$$

Ein neuer Fußweg soll nun so angelegt werden, sodass kurze Abstände der Käfige zum Fußweg entstehen. Der Tierpark hat sich für einen geraden Fußweg der Form $y = ax + b$ entschieden.

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y$ auf, das dieses Ausgleichsproblem beschreibt.

b) Lösen Sie das Minimierungsproblem

$$\|A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - y\| \longrightarrow min$$

mit der Methode der kleinsten Quadrate und geben Sie an, ob dieser ideale Fußweg so überhaupt angelegt werden kann oder ob er durch einen der Käfige führt.

Aufgabe 4

Gegeben ist folgende Matrix mit $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Werte $t \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix invertierbar ist.

b) Berechnen Sie für diese Werte t die inverse Matrix A_t^{-1}.

Aufgabe 5

Berechnen Sie mithilfe der Diagonalisierung C^8 bei gegebener Matrix C mit $c_{ij} \in \mathbb{C}$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(X) = AX - XA$ eine lineare Abbildung, wobei X eine Matrix mit reellen Koeffizienten ist und folgende Gestalt hat:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die komponentenweise Darstellung von f an.

b) Bestimmen Sie den Kern von f.

c) Bestimmen Sie das Bild von f.

Aufgabe 7

Sei $\mathcal{P} = span(B)$ mit $B = \{1, x, x^2\}$ sowie $B' = \{(1-x)^2, 2x(1-x), x^2\ \}$.

a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von $\mathcal{P}$ bildet.

b) Geben Sie die Matrix des Basiswechsels von B' nach B an.

c) Geben Sie ebenfalls die Matrix des Basiswechsels von B nach B' an.

Aufgabe 8

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			f sei eine lineare Abbildung. Dann gilt $f(0) = 0$.
2			A, B sind reguläre Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$, dann gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3			Orthogonale Matrizen haben auf jeden Fall einen Eigenwert gleich Null.
4			Für die Determinante einer quadratischen Matrix gilt: $det(A + B) = det(A) + det(B)$.