FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2014, am 16.09.2014

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matr.-Nr.: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ existieren

a) keine Lösung

b) unendlich viele Lösungen

c) eine eindeutige Lösung ?

Aufgabe 2

Ein Hammerwerfer im Punkt (0,0) läßt seinen Hammer mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn im Ring kreisen. Zu einem festgelegten Zeitpunkt befindet sich der Hammer im Punkt (1,0). Die lineare Abbildung f mit zugehöriger Abbildungsmatrix A beschreibt jeweils eine Vierteldrehung.

a) Wo befindet sich der Hammer nach einer Vierteldrehung?

b) Stellen Sie A auf.

c) Ist f linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

In Wirklichkeit bewegt sich der Hammerwerfer zusätzlich zu der Drehung um den Vektor

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

pro Vierteldrehung. Gehen Sie zur Vereinfachung davon aus, dass zuerst die Drehung und dann die Bewegung durchgeführt wird.

d) Ist die Abbildung aus Drehung und Bewegung linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Wo befindet sich der Hammer nach einer halben Drehung und der zugehörigen Bewegung?

   Tipp: Bedenken Sie dabei, dass die zweite Drehung um den dann aktuellen Standort des Hammerwerfers und nicht um den Punkt (0,0) erfolgt.

Aufgabe 3

Sei $A = (a_{ij})$ eine 3×3-Matrix und $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} a_{31} + a_{32} + a_{33} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie: f ist eine lineare Abbildung.

b) Zeigen Sie: f ist surjektiv.

c) Bestimmen Sie die Dimension von Kern(f) und Bild(f).

Aufgabe 4

Der Kapitän eines Motorbootes benutzt zur Orientierung das Koordinatensystem K. Eine Achse zeigt in Richtung Osten, die andere in Richtung Norden, der Ursprung befindet sich im Ausgangshafen. Die Einheit auf beiden Achsen ist je eine Seemeile (sm). Das Motorboot ist mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1 sm/h zwei Stunden in Richtung Norden und eine Stunde in Richtung Osten gefahren und dann vor Anker gegangen. Ein Segelboot, das im selben Hafen startet, muss aufgrund des Windes kreuzen und kann in sm gemessen pro Stunde die Strecke

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

bewältigen, alle anderen Kurse spielen aufgrund des Kreuzens keine Rolle. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden das Koordinatensystem K', in dem der Skipper des Segelbootes seine Koordinaten betrachtet. Sein Ursprung liegt ebenfalls im Hafen.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix von K nach K'.

b) Der Skipper möchte zum Motorboot segeln. Bestimmen Sie dazu die Koordinaten des Motorbootes im Koordinatensystem K'.

c) Welche Koordinaten in K hat eine Boje, die in K' die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat

Aufgabe 5

Eine besondere Art einer Meeresschildkröte ist vom Aussterben bedroht. Ein Grund von vielen besteht darin, dass weite Strände für den Massentourismus baulich erschlossen wurden, an denen die Schildkröten vorher ihre Eier ablegten. Aber die Tourismusindustrie will jetzt Projekte fördern, um die Restbestände zu schützen.
Die Population lässt sich ganz schwierig beobachten, da die Meeresschildkröten nachts ihre Eier am Strand ablegen und anschliessend die Nester zuscharren. Die kleinen Schildkröten schlüpfen nach ca. zwei Monaten. Wenn sie geschlechtsreif sind, also nach ca. 20 Jahren, kommen sie an diesen Strand zurück.
Die Schildkröten pflanzen sich nicht jedes Jahr fort. Wir betrachten eine Population, die zu Beobachtungsbeginn, also nach der Eiablage, aus

- 60000 Eiern (E_0)
- 24000 Jungschildkröten (J_0)
- 300 geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten (W_0)

besteht.
Die jährliche Entwicklung dieser Population lässt sich durch folgende Matrix beschreiben:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0.05 & 0.89 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Die jeweils folgende Generation ergibt sich also aus $\begin{pmatrix} E_{n+1} \\ J_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ W_n \end{pmatrix}$.

a) Erläutern Sie die Bedeutung des Matrixelementes an der Stelle (3,2) in dieser Modellmatrix M.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Eier, der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Schildkröten nach einem Jahr nach Beobachtungsbeginn.

c) Zeigen Sie, dass es keine Population $\vec{x}$ gibt, die nach einem Jahr unverändert bleibt, d.h. es gibt kein $\vec{x} \neq 0$ mit $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Hinweis: Das Rechnen kann durch die Nutzung von Brüchen vereinfacht werden.

Aufgabe 6

Über $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei folgendes bekannt:

- $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.
- Das charakteristische Polynom von A lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$.

Bestimmen Sie A.

Hinweis: Beschreiben Sie einen systematischen Lösungsweg. Die alleinige Angabe einer Lösung genügt nicht.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Orthogonalmatrix ist.

b) Geben Sie die inverse Matrix B^{-1} an.

c) Geben Sie $\det(B^2)$ an.

Aufgabe 8

Seien A, B reelle $n \times n$-Matrizen.

a) Definieren Sie Eigenvektor und Eigenwert.

b) Beweisen Sie: Ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert λ und ist $Bv \neq 0$, dann ist Bv Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.

c) Zeigen Sie: AB und BA haben die gleichen Eigenwerte.