FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2015, am 22.09.2015
keine Hilfsmittel

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von α:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 12 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Bei einem Laborexperiment sind folgende zeitabhängigen Werte ermittelt worden.

t	0	1	3	4
h(t)	5	4	2	7

Es wird folgender Zusammenhang zwischen t und $h(t)$ vermutet:

$$h(t) = a + b \cdot (t-2)^2$$

a) Stellen Sie die vier Gleichungen auf, die sich durch die Tabelle ergeben.

b) Schreiben Sie das angegebene lineare Gleichungssystem in Matrix/Vektorschreibweise mit einer $4x2$-Matrix.

c) Untersuchen Sie, ob das lineare Gleichungssystem lösbar ist.
Wenn ja, geben Sie die Lösung an.

d) Falls es nicht lösbar ist, stellen Sie die Normalengleichung auf.
Und ermitteln Sie die Werte für a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Aufgabe 3

Sei

$$S = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{R}$ fest. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt:

$$S^n = \begin{pmatrix} t^n & n \cdot t^{n-1} & \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot t^{n-2} \\ 0 & t^n & n \cdot t^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

b) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine Orthogonalmatrix U, so dass gilt: $U^T AU = D$

Aufgabe 5

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soll einen Vektor um 45° bzw. $\frac{\pi}{4}$ <u>im</u> Uhrzeigersinn drehen.
Die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soll einen Vektor an der x-Achse spiegeln.
Die lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soll den Wert der x-Komponente unverändert lassen und die y-Komponente verdreifachen.

a) Bestimmen Sie F, die zu f gehörige Abbildungsmatrix.

b) Bestimmen Sie G, die zu g gehörige Abbildungsmatrix.

c) Bestimmen Sie H, die zu h gehörige Abbildungsmatrix.

d) Bestimmen Sie J, die zu $g \circ f$ gehörige Abbildungsmatrix. Die Abbildung dreht also erst und spiegelt dann.

e) Untersuchen Sie die Matrizen J und H auf Orthogonalität.

f) Bestimmen Sie J^{-1}.

Aufgabe 6

Bei der MATSE-Stahl AG werden die Metallelemente mit Hilfe zweier Schwerlastkräne bewegt. Da die Schwerlastkräne auf unterschiedlichen Schienen rollen, werden die Koordinaten der zu bewegenden Lasten auch in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben, deren Ursprung jeweils im Punkt (0,0) liegt. Das Koordinatensystem von Kran A wird durch die Basisvektoren

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

gebildet, während die Basisvektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

das Koordinatensystem von Kran B aufspannen. Die vertikale Richtung kann hier ignoriert werden, da die Lasten selbstverständlich grundsätzlich in senkrechter Richtung aufgenommen werden.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Last L mit den kanonischen Koordinaten (7, 1) in den Koordinatensystemen A und B.

b) Stellen Sie die Transformationsmatrix T_E^A auf, die A-Koordinaten in kanonische Koordinaten transformiert.

c) Stellen Sie die Transformationsmatrix T_A^E auf, die kanonische Koordinaten in A-Koordinaten transformiert.

d) Stellen Sie die Transformationsmatrix T_A^B auf, die B-Koordinaten in A-Koordinaten transformiert.

Aufgabe 7

Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix.

a) Definieren Sie für A den Begriff "positiv definit".

b) Sei nun A symmetrisch und positiv definit ("spd") und B eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix.
Zeigen Sie, dass dann $B^T AB$ und BAB^T spd sind.

Tipps:

- Weisen Sie beide Eigenschaften, also Symmetrie und Definitheit, separat nach.
- Es gilt $\langle x, y \rangle = x^T y$.

c) Die Aussage aus b) gilt nicht für beliebige quadratische Matrizen B.
Finden Sie eine Matrix B, für die die Aussage in b) nicht zutrifft.

Aufgabe 8

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt in V.

a) Definieren Sie den Begriff "Orthogonalsystem" in einem euklidischen Vektorraum.

Seien $v_1, ..., v_n \in V$.
Die "Gramsche Matrix" sei definiert durch

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie, dass die Matrix G symmetrisch ist.

c) Beweisen Sie:

$$v_1, ..., v_n \text{ sind linear unabhängig} \Rightarrow G \text{ ist invertierbar.}$$