Benno Willemsen, Birgit Decker, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 14 03/04.07.2017

Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Können Sie für diese Matrizen eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix B finden, so dass gilt: $B^{-1}AB = D$?

2.) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist die Matrix diagonalisierbar (d.h. existiert VDV^{-1}) ? Falls ja, wie würde dann eine Transformationsmatrix V lauten?

3.) Eine Matrix A sei sowohl diagonalisierbar als auch invertierbar. Zeigen Sie, dass dann auch A^{-1} diagonalisierbar ist.

4.) Eine Matrix A besitzt die Eigenwerte λ_1=1 und λ_2=2. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix A.

5.) Berechnen Sie mittels der Diagonalisierung A^8 für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Hausaufgaben (freiwillig, keine Abgabe)

6.) Gesucht ist die Matrix A mit den Eigenwerten 1 und 4 und den zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.

(b) Geben Sie eine geometrische Interpretation für die lineare Abbildung, die durch A beschrieben wird.

(c) Bestimmen Sie A^4 unter Ausnutzung des Ergebnisses von (b) (ohne Rechnung).

8.) (a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Gibt es einen Fixpunkt (d.h. existiert ein Vektor $\vec{x}$ mit $A\vec{x} = \vec{x}$)?

(c) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine Orthogonalmatrix U, so dass gilt: $U^T AU = D$.