

Übungsblatt 7

22.11.2017

Präsenzaufgaben

- 1.) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 8 \\2x - y - 2z &= -1 \\3x + y + \alpha z &= 11\end{aligned}$$

keine eindeutige Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?

- 2.) In welchem Punkt schneidet die Gerade durch die Punkte $P = (1; 1; 1)$ und $Q = (1; 2; 3)$ die (x_1, x_2) -Ebene? Berechnen Sie auch den Winkel.
Welche Ebene senkrecht zur Geraden verläuft durch den Nullpunkt?

- 3.) Gegeben sind die zwei Punkte $P = (1; 2; 3)$ und $Q = (-1; 1; 2)$ und die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Geraden g_1 bzw. g_2 durch den Punkt P in Richtung von \vec{a} bzw. durch Q in Richtung von \vec{b} .
(b) Sind die Geraden windschief (d.h. sind sie weder parallel noch haben sie einen Schnittpunkt)?
(c) Falls das der Fall ist, bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf beiden Geraden steht.

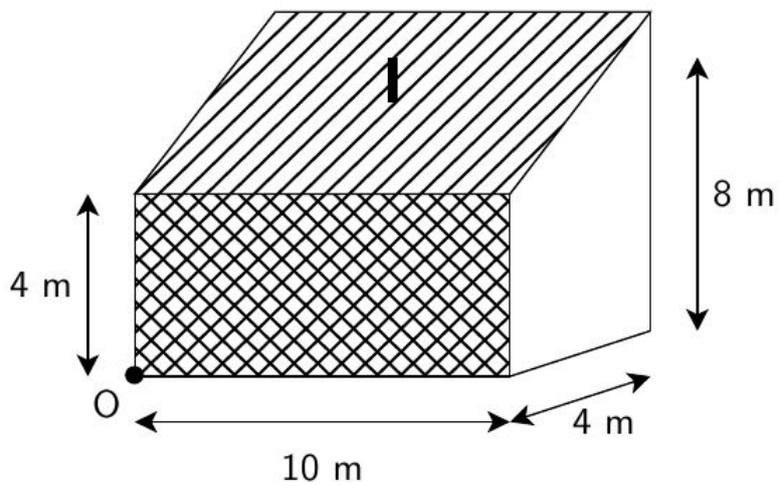
Bestimmen Sie ggf. den kürzesten Abstand der Geraden.

- 4.) Welche Abstände haben die Punkte $Q = (7; 4; 5)$ und $R = (-4; -6; -3)$ von der Ebene

$$\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

- 5.) **Typische IHK-Aufgabe.** Das abgebildete Haus hat die Ausmaße: 10m in x-Richtung, 4m in y-Richtung und zwischen 4m und 8m in z-Richtung (siehe Abbildung). Genau in der Mitte seines Daches steht eine 1m hohe Antenne. Auf das Haus fällt (paralleles) Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\vec{v} = (1, -1, -3)$. Der Koordinatenursprung O liegt vorne in der linken unteren Hausecke.

- (a) Berechnen Sie Anfangs- und Endpunkt der Antenne.
(b) Berechnen Sie den Schattenpunkt der Antennenspitze auf der Dachoberfläche.
(c) Wie lang ist der Schatten der Antenne auf dem Dach?



6.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Hausaufgaben (Abgabe bis 28.11.2017)

7.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im \mathbb{R}^3 besitzen:

(a)

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

8.) Ein Bauherr möchte sein Haus mit einem Spitzdach oder Satteldach versehen. Leider baut er das Haus genau unter einer 14 Meter hohen Brücke, also muss er darauf achten, dass das Dach einen Mindestabstand von zwei Metern zur Brücke hat. Das Dach beginnt in einer Höhe von 6 Metern und in einem gedachten Koordinatensystem gibt der Bauherr die Koordinaten des Daches, das er sich vorstellt, wie folgt an:

„Die eine Dachfläche liegt in einer Ebene, die durch die Punkte $(0, 0, 6)$ und $(10, 0, 6)$, sowie den Richtungsvektor $(0, 1, 1)$ beschrieben wird. Die zweite Dachfläche liegt in einer Ebene, die durch die Punkte $(10, 5, 11)$ und $(0, 10, 6)$ und den Richtungsvektor $(1, 0, 0)$ beschrieben wird.“

Die dritte Koordinate bezeichnet dabei die Höhe über dem Boden. Wie groß ist der kleinste Abstand des Daches von der Brücke, und kann der Bauherr sein Dach unter Berücksichtigung des einzuhaltenden Abstands zur Brücke so bauen?

9.) **Typische IHK-Aufgabe.** Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen mit gleich bleibender Geschwindigkeit auf einem geraden Kurs. F_1 befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $A(1|3|40)$ und zum Zeitpunkt $t = 3$ im Punkt $B(4|7|40)$. Zu den entsprechenden Zeiten befindet sich F_2 in $C(28| - 20|11)$ bzw. in $D(25| - 18|14)$. Die Koordinaten sind in Einheiten von 100m, die Zeitpunkte in Sekunden angegeben.

- (a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Flugzeug F_1 .
- (b) Von einem Beinahezusammenstoß spricht man, wenn der Abstand zweier Flugzeuge weniger als eine Längeneinheit beträgt. Kann es bei den gegebenen Flugbahnen zu einem solchen Beinahezusammenstoß kommen?
- (c) Bestimmen Sie die Positionen, bei denen sich die Flugzeuge am nächsten sind und geben Sie die minimale Entfernung an.

Im Punkt $E(70|95|40)$ beginnt Flugzeug F_1 mit dem Landeanflug. Der Pilot wählt für den Landeanflug die Richtung $\vec{v} = (13, 10, -2)^T$ und nimmt danach keine weiteren Richtungskorrekturen mehr vor. Beim Landeanflug fliegt das Flugzeug durch eine Wolkenschicht. Deren obere Grenze liegt in der Ebene $W_0 : x - 10z + 198 = 0$. Das Flugzeug verlässt die Wolkenschicht im Punkt $P_U(141, 5|150|29)$.

- (d) Bestimmen Sie den Winkel, mit dem das Flugzeug in die Wolkenschicht eindringt, die Länge der Strecke, die das Flugzeug in den Wolken zurücklegt sowie die Dicke der Wolkenschicht.
- (e) Der Flughafen liege in der Ebene $L : x - 10z = 0$, die Landebahn werde als Strecke mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 201, 3 \\ 196 \\ 20, 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 1, 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

beschrieben. Nach dem Verlassen der Wolkenschicht nimmt der Pilot noch eine Richtungsänderung vor. Warum?