Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2017/2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 9 — 06.12.2017

Präsenzaufgaben

1.) Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind:

(a) $W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$

(b) $W_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2\}$

(c) $W_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$

2.) Bestimmen Sie die lineare Hülle von $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Normalform.

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\begin{pmatrix} 2c^2 - \frac{3}{c} \\ 6c \\ \frac{1}{4c} - 2c^2 \end{pmatrix}$ Element des von a und b aufgespannten Untervektorraums ist.

3.) Stellen Sie fest, ob

$$X = \{f; f \in C[a,b]; f(a) = 0\}$$

ein Untervektorraum (bzw. linearer Teilraum) von $C[a,b]$ (dem Vektorraum der im Intervall $[a,b]$ definierten reellen stetigen Funktionen) ist.

4.) Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ist $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ linear unabhängig?

(b) Wie lautet das Ergebnis, wenn man $\vec{c}$ durch $\vec{d}$ ersetzt mit

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

(c) Sind die Vektoren $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{f}\}$ linear unabhängig mit

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}?$$

5.) Gegeben sei eine Menge $M = \{a, b, c\}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängiger Vektoren. Weiter seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ beliebig gewählt. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: $M' = \{\alpha a, \alpha b, \alpha c\}$ und $M'' = \{a + d, b + d, c + d\}$ sind Mengen linear unabhängiger Vektoren.

6.) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$. Sind U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

$$U_1 = \{\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = 0\}$$

$$U_2 = \{\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = 1\}$$

Hausaufgaben (Abgabe bis 12.12.2017)

7.) Es sei bekannt, dass $\mathcal{C}[a,b]$ einen Vektorraum wie in der Vorlesung beschrieben bildet. Bilden die folgenden Mengen Untervektorräume? $a \neq b$ und $a, b \neq 0$;

(a) $U_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}[a,b] | \int_a^b f(x)dx = 0 \right\}$

(b) $U_2 = \{ f \in \mathcal{C}[a,b] | f(a) \cdot f(b) = 0 \}$

8.) Untersuchen Sie die drei gegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.

(b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$