Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 1 03.04.2018

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} {x_1}^2 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

sowie die Menge $A = [-1; 1] \times [0; 10]$.

Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$, $f(A)$ und $f^{-1}(A)$.

2.) **Selbstlernphase** Lesen und verstehen Sie die Beweise in **Bemerkung 4.5** und **4.6** im Skript. Beweisen oder Wiederlegen Sie anschließend die folgenden Aussagen.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt f invertierbar $\Rightarrow f(0) = 0$.

(b) Es ex. eine zu sich selbst inverse Abbildung $f : A \to A$. A sei ein Vektorraum.

(c) Es sei $f : A \to B$ und $g : B \to C$. f und g invertierbar. Zur Verkettung $g \circ f : A \to C$ ist die Abbildung $f^{-1} \circ g^{-1}$ invers.

(d) Es sei $f : A \to B$ und $g : B \to C$. f und g invertierbar, A, B, C Vektorräume. Eine Linearkombination, wie in **Beispiel 3.24** definiert, von f und g ist invertierbar.

Hausaufgaben (Abgabe bis 08.04.2018)

3.) Geben sind die folgenden Abbildungen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$

sowie die Mengen$A = [0; 5]$ und $B = [-5; 0]$.
Bestimmen Sie jeweils $f(0), f^{-1}(0), f(A), f^{-1}(A), f(B), f^{-1}(B)$.

4.) Geben Sie im folgenden möglichst einfache Funktionen $f : [-1, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [-1, 1]$ an, die die folgenden Eigenschaften erfüllen. Geben Sie zusätzlich falls möglich eine Umkehrfunktion an.

(a) f ist injektiv aber nicht surjektiv

(b) f ist surjektiv aber nicht injektiv

(c) f ist bijektiv

(d) f ist weder injektiv noch surjektiv

5.) Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(c) $f(x_1, x_2) = (x_2, |x_1|)$

6.) Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$

(a) Zeigen Sie f ist linear

(b) Bestimmen Sie den Kern(f).

(c) Berechnen Sie das $Bild(f)$

(d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?