Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 3 16.04.2018

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$

(a) Zeigen Sie f ist linear

(b) Bestimmen Sie den Kern(f) und geben Sie die $dim(Ker(f))$ an.

(c) Berechnen Sie die $dim(Bild(f))$ bzw. $rg(f)$ und bestimmen Sie das $Bild(f)$

(d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?

2.) Für eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sind folgende Einzelabbildungen bekannt:

$$\begin{aligned}
\Phi((1,0,0)^T) &= (-1,0)^T \\
\Phi((-1,0,1)^T) &= (3,1)^T \\
\Phi((0,2,-1)^T) &= (-2,1)^T \\
\Phi((0,2,0)^T) &= (0,2)^T
\end{aligned}$$

(a) Wie viele der obigen vier Angaben benötigen Sie zur Bestimmung der Abbildungsmatrix?

(b) Bestimmen Sie mit ausreichend vielen dieser Angaben die zugehörige Abbildungsmatrix

(c) Überprüfen Sie ggf., ob alle vier Angaben konsistent sind.

3.) Berechnen Sie in Abhängigkeit von x den Kern, die Dimension des Kerns, den Rang und das Bild der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

4.) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $f(\vec{x}) = A_t\vec{x}$ mit

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Mengen $M_n = \{t \in \mathbb{R} | rg(A_t) = n\}$ für $n = 1, 2, 3$.

5.) Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten die *Projektion* p von $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung v (vgl. Lineare Algebra 1). Es gilt $p = \frac{\langle v,x \rangle}{||v||^2} v$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und $|| \cdot ||$ die euklidische Norm bezeichne.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P(x) = p$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A.

(c) Berechnen Sie Bild(P) und geben Sie eine Basis des Bildes an. Vermeiden Sie dabei umfangreiche Rechnungen! Wie lautet rg(A)?

(d) Bestimmen Sie Ker(P) und deuten Sie Ker(P) geometrisch.

(e) Geben Sie eine Basis von ker(P) an! Tipp: Erinnern Sie sich an die Umrechnung der verschiedenen Ebenendarstellungen ineinander!

(f) Zeigen Sie, das P keine Umkehrabbildung besitzt.

Hausaufgaben (Abgabe bis 22.04.2018)

6.) Sei f die Lineare Abbildung mit folgender Abbildungsmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie den Kern von f und seine Dimension.

(b) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimmen Sie $dim(Bild(f))$.

(c) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

7.) Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche werte von α ist die Abblidungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?

(b) Bestimmen Sie Die Matrix A_f in Abhängigkeit von α

(c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α.

8.) Gesucht ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Abbildungsmatrix A. Geben Sie im Folgenden jeweils eine Abbildungsmatrix an, sodass f die angegebenen Eigenschaften besitzt oder begründen Sie warum dies nicht möglich ist.

(a) $Kern(f) = \{0\} \quad Bild(f) = \mathbb{R}^3$

(b) $Kern(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad Bild(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $Kern(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad Bild(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$