Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

# Übungsblatt 5 — 30.04.2018

## Präsenzaufgaben

1.) Sie haben Koordinaten bzgl. der Einheitsmatrix $(e_1, e_2, e_3)$ gegeben, geben Sie eine Matrix an, welche die gegebenen Koordinaten in Koordinaten bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

transformiert.

2.) Es sind folgende Abbildungsmatrizen gegeben:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Matrix $A_\phi$ wird ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\phi$ gedreht, die Matrix $B$ spiegelt selbigen an der $x$-Achse.

(a) Veranschaulichen Sie die Behauptungen am Beispiel des Vektors $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$, wobei $A = A_{\frac{\pi}{2}}$, indem Sie den Vektor selber und dessen Abbildungen $f_A(\vec{x}_0) = A \cdot \vec{x}_0$ und $f_B(\vec{x}_0) = B \cdot \vec{x}_0$ in ein Koordinatensystem einzeichnen.

(b) Zeichnen Sie auch die hintereinander geschalteten Abbildungen $f_{AB}(\vec{x}_0) = A \cdot B \cdot \vec{x}_0$ und $f_{BA}(\vec{x}_0) = B \cdot A \cdot \vec{x}_0$ von $\vec{x}_0$.

(c) Wie sehen die Umkehrabbildungen zu $f_A(\vec{x})$ und $f_B(\vec{x})$ aus? Stellen Sie dazu die Abbildungsmatrizen $A^{-1}$ und $B^{-1}$ auf.

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen zu den Umkehrabbildungen $f_{AB}^{-1}$ und $f_{BA}^{-1}$.

(e) Verifizieren Sie die Ergebnisse aus b) und d), indem Sie die Vektoren $f_{AB}(\vec{x}_0)$ und $f_{BA}(\vec{x}_0)$, die Sie zeichnerisch bei b) erhalten haben mit den Matrizen aus d) multiplizieren.

3.) Es sei $B = A + xy^T$. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $A$ sei invertierbar. $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zeigen Sie:

Wenn $B$ nicht invertierbar ist (es ex. $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Bz = 0$), dann gilt $y^T A^{-1} x = -1$

<u>Hinweis:</u>Beginnen Sie mit der Gleichung $Bz = 0$ und versuchen Sie die Gleichung so umzuformen, dass Sie den Ausdruck $y^T A^{-1} x$ wiederfinden. Multiplizieren Sie ggf.geeignet Ausdrücke von links oder rechts. Sie können vorraussetzen, dass gilt $y^T z \neq 0$.

## Hausaufgaben (Abgabe bis 06.05.2018)

4.) Für welche reellen Zahlen $a$ ist die folgende Matrix $A$ invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.) $A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $A' = \{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\}$ und $A'' = \{\vec{a}''_1, \vec{a}''_2, \vec{a}''_3\}$ bilden mit den kanonischen Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sowie

$$\vec{a}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\vec{a}''_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}''_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}''_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils Basen des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_A^{A'}, T_A^{A''}$ sowie $T_{A'}^A, T_{A''}^A$.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{A''}^{A'}$ sowie $T_{A'}^{A''}$.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $(1, 0, 1)$ bzgl. der Basen $A'$ und $A''$ unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung benutzten Schreibweise.

6.) Es sei $B = A + xy^T$. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $A$ sei invertierbar. $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

Wenn $y^T A^{-1} x = -1$, dann ist B nicht invertierbar.

Hinweis: Wenn $B \cdot A^{-1}$ nicht invertierbar ist, dann ist auch $B$ nicht invertierbar.
Um zu zeigen, dass eine Matrix $M$ nicht invertierbar ist, müssen Sie zeigen, dass für einen Vektor $z \neq 0$ gilt $Mz = 0$. Untersuchen Sie speziell, wie der Vektor $x$ abgebildet wird.