Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 7 — 14.5.2018

Präsenzaufgaben

1.) Welche der folgenden Matrizen sind Elementarmatrizen? Geben Sie die Zeilenoperationen an, die einer Multiplikation von links mit den folgenden Matrizen entsprechen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.) Berechnen Sie die Determinanten zu

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Laplace

3.) Selbstlernphase zum Thema Eigenschaften der Determinante:
Lesen und verstehen Sie die Beweise zur Bemerkung 5.11 und zum Satz 5.15 im Skript und beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Zu Bemerkung 5.11: Erklären Sie, warum sich $2k-1$ Vertauschungen ergeben.

(b) Zu Satz 5.15: Erklären Sie, warum L_B nur dann vollen Rang besitzen kann, falls alle Hauptdiagonalelemente von B ungleich 0 sind.

4.) Ist es möglich die folgenden Matrizen als Produkt von Elementarmatrizen darzustellen? Begründen Sie ihre Antwort. Falls ja, geben sie die Matrix als Produkt $C_n \cdot ... \cdot C_1$ von Elementarmatrizen an.

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

5.) Gegeben seien folgende Basen

$$A = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$B = \left\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für die durch $F(\vec{a_1}) = 2\vec{b_1} + \vec{b_2}$, $F(\vec{a_2}) = \vec{b_1}$, $F(\vec{a_3}) = \vec{b_3}$ gegebene lineare Abbildung bestimmen Sie die folgenden Abbildungsmatrizen:

(a) bzgl. der Basen A (Definitionsbereich) und B (Wertebereich)

(b) bzgl. der Basis A im Definitions- und Wertebereich

(c) bzgl. der kanonischen Basis im Definitions- und Wertebereich

Hausaufgaben (Abgabe bis 21.05.2018)

6.) Die Komponenten $a_{ij}, i, j = 1, ..., n$ der Matrix $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werden nach folgender Vorschrift gebildet:

$$a_{ij} = \begin{cases} i-1, \text{falls} & (i = j \vee i-1 = j) \wedge i \neq 1 \\ 1, \text{falls} & i = 1 \wedge j = n \\ 0, \text{sonst} & \end{cases}$$

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 3$. Stellen Sie A_3 auf und berechnen Sie daraus die Determinante.

(b) Stellen Sie anschließend allgemein, in Abhängigkeit von n, A_n auf und geben Sie die Determinante in Abhängigkeit von n an.

7.) Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^N = \begin{pmatrix} i & f & c \\ h & e & b \\ g & d & a \end{pmatrix}$$

wobei A^N durch Spiegelung der Matrix A an ihrer Nebendiagonalen (c, e, g) entstanden ist. Bestimmen Sie det(A^N) mit Hilfe von det(A) durch Transponieren, Zeilen- und Spaltenvertauschungen von A.

8.) Eine spezielle $n \times n$-Tridiagonalmatrix T_n ist gegeben durch:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i = j-1 \text{ oder } j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie die Matrix für $n = 5$ explizit auf.

(b) Zeigen Sie, dass für die Determinanten $D_n = \text{det}(T_n)$ gilt:

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots \text{ mit } D_0 = 1.$$

(c) Berechnen Sie D_n mit Teil b) für n=2,3,4,5. Geben Sie eine explizite (nicht rekursive)Formel für D_n an und beweisen Sie sie.