Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 11 — 11.6.2018

Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie die Inverse zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

und verifizieren Sie ihr Ergebnis.

2.) Gegeben Sei eine Matrix $C = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Stellen Sie eine Vermutung für C^n auf und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

3.) Gegeben sei ein Gleichungssystem $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Lösungsmenge $\mathcal{L}$. Haben die folgenden Gleichungen ebenfalls die Lösungsmenge $\mathcal{L}$? Begründen Sie ihre Antwort

(a) $BAx = Bb$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}, m > n, rg(B) = n$

(b) $BAx = Bb$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}, rg(B) = m$

(c) $BAx = Bb$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}, rg(B) \neq m$

Im folgenden sei wie oben $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, n < m$. Ändern folgende Umformungen die Lösungsmenge?

$$Ax = b \Leftrightarrow A^T Ax = A^T b \Leftrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

4.) Gegeben sei ein Dreieck bestehend aus drei Punkten $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Weiter sei die Matrix $S = \begin{pmatrix} 13 & 36 \\ -4 & -11 \end{pmatrix}$ mit der dazugehörigen linearen Abbildung gegeben.

(a) Nennen Sie mithilfe von Determinanten eine Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks.

(b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die gegebene lineare Abbildung die Fläche eines Dreiecks nicht verändert.

(c) Zeigen Sie allgemein, dass die Abbildung die Fläche eines Dreiecks nicht verändert.

5.) Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $u \neq v$. $A = uv^T$ Beweisen Sie: $A^2 =< u, v > A$ Hinweis:$x^T y =< x, y >$. Versuchen sie geschickt zu klammern, multiplizieren Sie nicht elementweise.

Hausaufgaben (Abgabe bis 17.6.2018)

6.) Zeigen sie, dass $A^n =< u, v >^{n-1} A \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dabei gilt $u, v \in \mathbb{R}^n$.

7.) Bestimmen Sie die Lösung mit der kleinsten Norm der unterbestimmten Gleichungssysteme:

(a) $\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & + & 3z = 4 \\ 3x & + & 2y & + & z = 2 \end{array}$ (b) $x + 2y - 2z = 6$

8.) Die Punkte $A(6/0/0), B(2/1/3)$ und $C(-2/-2/2)$ liegen in einer Ebene E.

(a) Stellen Sie die Hessesche Normalform der Ebene auf. Wie groß ist der Abstand der Ebene zum Ursprung?

(b) Welcher Punkt in der Ebene hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? Stellen Sie dazu das zugehörige unterbestimmte LGS auf und finden Sie die Lösung mit Hilfe der verallgemeinerten Inverse.