Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 14 2.7.2018

Präsenzaufgaben

1.) Welche der im folgenden genannten Abbildungen sind quadratische Formen? Stellen Sie gegebenenfalls die zugehörige (symmetrische) Matrix A auf.
Ist A positiv definit, negativ definit oder indefinit?

(a) $f(\vec{x}) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$

(b) $f(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2 + 4$

(c) $f(\vec{x}) = x_1x_2 + x_3x_4 - 20x_5$

(d) $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_3^2 + x_1x_4$

2.) Welche der folgenden Matrizen ist positiv, negativ, semi-positiv oder semi-negativ definit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.) Die Matrix A habe folgende Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \{-2, 2\}$ und $b \in \{-1, 0, 1\}$. Für welche a, b ist die Matrix A

(a) positiv definit,

(b) negativ definit,

(c) indefinit?

4.) Zeigen Sie, dass sämtliche Diagonalelemente einer positiv definiten Matrix A positiv sind.

Tipp: Gehen Sie von der quadratischen Form aus und setzen Sie $\vec{x} = \vec{e}_i$. Müssen die anderen Matrixelemente auch positiv sein?

5.) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Zu jeder spd-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine spd-Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = B^2$

Hausaufgaben (freiwillig, keine Abgabe)

6.) Zeigen Sie:

(a) $(AA^T = E \wedge BB^T = E \wedge C = AB) \Rightarrow CC^T = E$

(b) Es sei $w \in \mathbb{R}^n$ mit $||w||_2 = 1$ und $A := E - 2ww^T$, dann gilt $A^2 = E$

(c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AA = E$. Dann gilt diese Folgerung:

$$det(A) = 1 \Rightarrow (A = E \vee A = -E)$$

7.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die sich durch eine Spiegelung an der Achse durch den Ursprung mit dem Einheitsvektor

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{e}_2$$

ergibt, wobei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^2$ darstellen.

(a) Wie lautet die Abbildungsmatrix A von f bzgl. der Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?
(Hinweis: $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos 60° = \frac{1}{2}$.)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und die Eigenvektoren $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ von A.

(c) Sei nun $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ die Basis eines neuen Koordinatensystems B'. Wie lautet die Matrix A' von f in diesem KO-System?