Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 9 — 20./21.05.2019

Präsenzaufgaben

1.) Die Determinante der folgenden Matrix A_1 ist:

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = d.$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $\det(A_1)$ die Determinaten der folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $c, d \in \mathbb{R}$:

(a) $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c \cdot a_{31} & c \cdot a_{32} & c \cdot a_{33} & c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(b) $A_3 = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + a_{41} & a_{12} + a_{42} & a_{13} + a_{43} & a_{14} + a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(c) $A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(d) $A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} + c \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + c \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + c \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + c \cdot a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(e) $A_6 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} + c \cdot a_{31} & a_{12} + c \cdot a_{32} & a_{13} + c \cdot a_{33} & a_{14} + c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(f) $A_7 = (A_1)^{-1}$

2.) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 26. \end{pmatrix}$$

Bringen Sie die Matrix A auf obere Dreiecksgestalt, indem Sie sie von links mit den für die Zeilenumformungen erforderlichen Elementarmatrizen multiplizieren. Multiplizieren Sie auch die rechte Seite b von links mit diesen Elementarmatrizen und lösen Sie anschließend das Gleichungssystem durch Rückwärtssubstitution.

3.) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ d \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Werte für c und d, für die das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$

(a) genau eine Lösung

(b) keine Lösung

(c) unendlich viele Lösungen

hat.

Hausaufgaben (Abgabe bis 26.05.2019)

4.) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -2 & 1 \\ -17 & 9 & -6 & 117 \\ 4 & 2 & -8 & 38 \\ 3 & 17 & 34 & -217 \end{pmatrix}$$

unter der Annahme, dass die Determinanten der folgenden Matrizen bekannt sind,

$$B = \begin{pmatrix} 17 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 38 & -4 & 3 \\ -17 & 117 & -3 & 4 \\ 3 & -217 & 17 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 17 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 & 38 \\ -17 & 5 & -3 & 117 \\ 3 & 0 & 17 & -217 \end{pmatrix}$$

wobei $\det(B) = x$ und $\det(C) = y$.

(3 Punkte)

5.) Für welche Werte von a ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

lösbar? Geben Sie in diesen Fällen die Lösungen der Gleichung an.

(3 Punkte)

6.) Bestimmen Sie die Lösbarkeit der folgenden beiden Gleichungssysteme in Abhängigkeit von λ:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ \lambda & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wie hängt in beiden Fällen die Lösbarkeit des Gleichungssystems vom Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ \lambda & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

ab?

(je 3 Punkte)