

## Übungsblatt 14

24./25.06.2019

### Präsenzaufgaben

- 1.) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Können Sie für diese Matrix eine Diagonalmatrix  $D$  und eine invertierbare Matrix  $B$  finden, so dass gilt:  $B^{-1}AB = D$ ?

- 2.) Berechnen Sie mittels der Diagonalisierung  $A^8$  für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$ .

- 3.) (a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Gibt es einen Fixpunkt (d.h. existiert ein Vektor  $\vec{x}$  mit  $A\vec{x} = \vec{x}$ )?

(c) Finden Sie eine Diagonalmatrix  $D$  und eine Orthogonalmatrix  $U$ , so dass gilt:  
 $U^T A U = D$ .

- 4.) Welche der im folgenden genannten Abbildungen sind quadratische Formen? Stellen Sie gegebenenfalls die zugehörige (symmetrische) Matrix  $A$  auf.  
Ist  $A$  positiv definit, negativ definit oder indefinit?

(a)  $f(\vec{x}) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$

(b)  $f(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2 + 4$

(c)  $f(\vec{x}) = x_1x_2 + x_3x_4 - 20x_5$

(d)  $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_3^2 + x_1x_4$

## Freiwillige Hausaufgaben (keine Abgabe!)

5.) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist die Matrix diagonalisierbar (d.h. existiert  $VDV^{-1}$ ) ? Falls ja, wie würde dann eine Transformationsmatrix  $V$  lauten?

6.) Die Matrix  $A$  habe folgende Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

wobei  $a \in \{-2, 2\}$  und  $b \in \{-1, 0, 1\}$ . Für welche  $a, b$  ist die Matrix  $A$

- (a) positiv definit,
- (b) negativ definit,
- (c) indefinit?

7.) Gegeben seien die beiden quadratischen Formen:

(a)  $f(\vec{x}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$

(b)  $f(\vec{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_3 + x_1x_4 - 3x_2x_1 + x_2x_4 - 2x_3x_1 + x_3x_2 + 4x_3^2 - 3x_3x_4 + 2x_4x_1 - 5x_4x_2 + x_4x_3 - 5x_4^2$

Ermitteln Sie jeweils die zugehörige symmetrische Koeffizientenmatrix  $A$ .

8.) Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit, negativ definit, positiv semidefinit, negativ semidefinit oder indefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$