Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 7 13./14.11.2019

Präsenzaufgaben

1. Gegeben sind die zwei Punkte $P = (1; 2; 3)$ und $Q = (-1; 1; 2)$ und die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Geraden g_1 bzw. g_2 durch den Punkt P in Richtung von $\vec{a}$ bzw. durch Q in Richtung von $\vec{b}$.
   b) Sind die Geraden windschief (d.h. sind sie weder parallel noch haben sie einen Schnittpunkt)?
   c) Falls das der Fall ist, bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf beiden Geraden steht.

2. Gegeben sind zwei Ebenen E_1 und E_2 durch

$$E_1 : 2x + y - z = 7 \quad \text{und} \quad E_2 : x + 4y + 2z = 3.$$

   Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden. Welchen Abstand hat der Punkt $P = (2; 3; 0)$ zu beiden Ebenen? Welcher Punkt der Ebene E_2 hat den kürzesten Abstand zu P?

3. Bezogen auf ein Koordinatensystem mit einem Flughafen im Ursprung verlaufen die Bahnen zweier Flugzeuge auf den Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie, wie nah sich die Flugzeuge im ungünstigsten Fall kommen können. Bestimmen Sie weiterhin die Lotfußpunkte der beiden Geraden.

4. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Hausaufgaben (Abgabe bis 19.11.2019)

1. Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x - y + t \cdot z = 9, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

2. a) In welchem Punkt schneidet die Gerade durch die Punkte $P = (1; 2; 1)$ und $Q = (2; 4; 3)$ die $(x_1, x_2)-$Ebene?
   b) Berechnen Sie auch den Winkel.
   c) Welche Ebene senkrecht zur Geraden verläuft durch den Nullpunkt?
   d) Wie ist der Abstand der Geraden vom Nullpunkt?
   e) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden von der Geraden g mit

$$g : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. **Typische IHK-Aufgabe.** In einem Berghang steht ein 20 Meter hoher Turm mit einem Funksender auf der Spitze, dessen Reichweite in alle Richtungen 100 Meter beträgt. Der Berghang hat eine gleichmäßige Steigung von 100 % (entspricht $45°$ zur horizontalen Fläche) und ist ein Südhang, d.h. die Talsohle liegt im Süden, der Gipfel im Norden.
   a) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung zwischen Sender und Berghang.
   b) Berechnen Sie für jede der vier Himmelsrichtungen den Punkt, an dem man den Sender gerade noch empfangen kann.

   Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!