Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2019/2020

Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 9 — 27./28.11.2019

Präsenzaufgaben

1. Gegeben sind 2 Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Vektor p als Projektion von b auf a und dann den Vektor q, die Projektion von p auf b. Berechnen Sie daraus

$$\frac{\|q\|}{\|p\|}$$

   und vereinfache das Ergebnis so, dass darin nur noch die Vektoren a und b vorkommen. Kann man das Ergebnis geometrisch interpretieren?

2. Zeigen Sie, dass für alle Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2.$$

3. Gegeben sind die folgenden Geraden in der Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} g_1 : &\quad x = 1 + t; &\quad y = 3 - 2 \cdot t \\ g_2 : &\quad x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} \cdot t; &\quad y = 1 - 4 \cdot t \end{aligned}$$

   Geben Sie die jeweiligen Normalform und Hesse-Normalform an. Gibt es einen Schnittpunkt?

4. Durch 3 Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) soll eine Kurve der Form

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3$$

   gelegt werden. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf und untersuchen Sie, in welchem der beiden folgenden Fälle die Lösung eindeutig ist.

   a) $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (2, 6)$
   b) $(x_0, y_0) = (-1, -1)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 1)$

   Tipp: Benutzen Sie die Determinantenregeln.

Hausaufgaben (Abgabe bis 03.12.2019)

1. Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie den Projektionsvektor von a auf b und den Vektor $s \in \mathbb{R}^3$, der durch **Spiegelung** von a an b entsteht (Skizze!).

2. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen

   a) $3x + 4z = 7 \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -6x - 6y - 3z = 1$

3. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der folgenden drei Ebenen:

$$x + y + z = 0$$
$$2x + 3y + z = 5$$
$$-x + 2y + 2z = -3$$

4. Gegeben ist die Gerade

$$g : x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Ermitteln Sie den kürzesten Abstand zu den nachfolgenden Punkten und die entsprechenden Lotfußpunkte (die Punkte auf der Geraden mit dem kürzesten Abstand).

   a) $P_1 = (0; 0; 0)$
   b) $P_2 = (1; 0; -3)$