Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2019/2020

Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 13 — 08./09.01.2020

Präsenzaufgaben

1. Gegeben sei die Basis $B = \{1, x^2, x^4\}$ des Vektorraums V der achsensymmetrischen Polynome maximal 4.Grades.

   a) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von B einen Untervektorraum vom Vektorraum P_4 der Polynome vom Grad 4 bildet.

   b) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$3x^4 - 7x^2 + 2$$
$$-x^4 + 2x^2 - 1$$
$$4x^4 + 3x^2 + 2$$

2. p und q seien reelle Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{2} p(x_k) \cdot q(x_k)$$

   wobei x_0, x_1, x_2 paarweise verschiedene reelle Zahlen sind, ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum P_2 der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 gegeben ist.

   Beispiel: $p = 5x + 2$, $q = x^2 + 3$; wähle $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
   $\Rightarrow \langle p, q\rangle = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 12 \cdot 7 = 118$

3. Bestimmen Sie mit der Projektionsformel $p = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y$ im unitären Raum $\mathbb{C}^2$ die Projektion von $x = (1 + i; 2 + i)^T$ auf $y = (1 - i; -1)^T$.

4. Zeigen Sie, dass durch $||\vec{x}|| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$ eine Norm für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

Hausaufgaben (Abgabe bis 14.01.2020)

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionensysteme auf lineare Unabhängigkeit, wobei die Definitionsmenge immer $\mathbb{R}$ ist:

   a) $\{x,\, e^{-x},\, xe^{-x}\}$

   b) $\{2,\, \sin^2 x,\, \cos^2 x\}$

2. Es seien $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ Polynome aus dem Raum P_2 mit $b_i, a_i \in \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ ein Skalarprodukt auf P_2 definiert ist.

   b) Berechnen Sie mit Teil (a) den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren

      i. $p(x) = -1 + 5x + 2x^2$ und $q(x) = 2 + 4x - 9x^2$

      ii. $p(x) = x - x^2$ und $q(x) = 7 + 3x + 3x^2$

   Tipp: Der Winkel ist wie bei den Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert, wobei das hier gegebene Skalarprodukt und die Norm $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ zu verwenden sind.

3. Es seien $\vec{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{-\sqrt{5}}\right)^T$ und $\vec{y} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)^T$. Zeigen Sie, dass $\vec{x}$ und $\vec{y}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ orthogonal sind, bezüglich des Standardskalarprodukts aber nicht.

4. Beweisen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den gegebenen Abbildungen um eine Norm für Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ handelt.

   a)
   $$||x|| = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

   b)
   $$||x|| = |\prod_{i=1}^{n} x_i|$$

   c)
   $$||x|| = \min_{i=1,\dots,n} |x_i|$$