FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 1, WS 2014/15, am 04.02.2015

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(12)
Aufgabe 6)		(15)
Aufgabe 7)		(12)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Parallelogramm mit den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) den Umfang des Parallelogramms

Ergebnis: $U = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{6}$

b) die Mittelpunkte der Seiten

Ergebnis: $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Ergebnis: $F = \sqrt{35} \approx 5,92$

Aufgabe 2

Die vier MATSE Auszubildenden Jan, Jörg, Jens und Julia kaufen regelmäßig in derselben Bäckerei ein. Keiner der vier weiß aber, wieviel dort ein Muffin, ein Baguette oder ein Croissant kostet. Aber sie haben durch ihre Einkäufe die folgenden Informationen:
Jan hat beobachtet, dass er für 7 Baguette genausoviel bezahlt hat wie der Kunde vor ihm für 8 Muffins und 6 Croissant. Jörg kann berichten, dass er einmal 5 Baguette und 10 Muffins gekauft hat, ein andermal 9 Croissant und beide Male exakt dasselbe bezahlt hat. Julia sagt: „Ich wollte mir gestern morgen eigentlich ein Baguette kaufen. Da mir aber 60 Cent für ein Baguette fehlten, habe ich stattdessen 2 Muffins gekauft. Dafür hat mein Geld genau gereicht.“

a) Legt man die Einkäufe von Jan, Jörg und Julia zugrunde, wieviel kostet dann ein Muffin, ein Baguette, ein Croissant?

   Ergebnis: Muffin = 0,30 €, Baguette = 1,20 €, Croissant = 1,00 €

b) Jens behauptet, er habe heute morgen 9 Muffins gekauft und ein Croissant und dafür 4 Euro bezahlt.
   Hat Jens Recht mit seiner Behauptung, wenn man die in (a) berechneten Preise zugrunde legt? Wenn nicht, wieviel hat Jens tatsächlich bezahlt?

   Ergebnis: Jens liegt falsch. Er hat 3,70 € bezahlt.

Aufgabe 3

Folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Kein Ergebnis anzugeben!

b) Wieso handelt es sich nicht um eine Orthonormalbasis?

Kein Ergebnis anzugeben!

c) Bilden Sie eine Orthonormalbasis des von diesen Vektoren aufgespannten Raumes. Wenden Sie dazu das Verfahren von Gram-Schmidt auf die Vektoren in der angegebenen Reihenfolge an.

Ergebnis: $\vec{w}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Welche der folgenden Mengen U sind Untervektorräume des jeweiligen Vektorraums V?

a) $V = \mathbb{R}^3$ und
U ist die Ebene $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Ergebnis: U ist ein Untervektorraum von V

b) $V = \mathcal{C}[-1, 1]$ und
U ist die Menge der ungeraden Funktionen im selben Intervall, also $U = \{f \in V | f(-x) = -f(x) \,\forall\, x \in [-1, 1]\}$

Ergebnis: U ist ein Untervektorraum von V

c) $V = \mathbb{R}^4$ und
$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T | x_i$ ist für alle i eine ganze gerade Zahl $\}$

Ergebnis: U ist kein Untervektorraum von V

Begründen Sie Ihre Antworten durch einen Beweis bzw. durch ein Gegenbeispiel.

Keine Ergebnisse anzugeben!

Aufgabe 5

Bei der infrastrukturellen Erschließung von Matsestan sollen die Orte A mit Koordinaten $(0, 0)$ und B mit Koordinaten $(11, 2)$ mit einer Eisenbahnlinie verbunden werden. Aufgrund des unwegsamen Umlandes von A kann dort nur in Richtung $(4, 3)$ gebaut werden, während bei B in eine beliebige Richtung gebaut werden kann. Zur Zeitersparnis soll dabei von beiden Seiten aus gleichzeitig mit dem Bau je einer geraden Teilstrecke begonnen werden, die sich dann am Schnittpunkt treffen.

a) Beschreiben Sie die von A ausgehende Teilstrecke der Bahnlinie als Geradengleichung.

kein Ergebnis anzugeben.

b) In welche Richtung muss der Bau in B erfolgen, falls die von B ausgehende Teilstrecke möglichst kurz sein soll? Wie lang ist diese Teilstrecke dann?

Ergebnis: $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit 5 LE

c) Welche Richtung muss die in B begonnene Teilstrecke besitzen, falls beide Teilstrecken gleich lang sein sollen? An welcher Stelle treffen sich in diesem Fall die beiden Teilstrecken?

Ergebnis: Von B muss in Richtung $\begin{pmatrix} -6 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$ gebaut werden mit dem Schnittpunkt $S = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			$\forall a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt: $(a \times b) \times b = a$
2			Vektorräume haben grundsätzlich eine endliche Dimension.
3			In euklidischen Vektorräumen existiert grundsätzlich ein Skalarprodukt.
4			$\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt: $$\|a_b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\},$$ wobei a_b die orthogonale Projektion von a auf b ist.
5			Für jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in einem Vektorraum V über einem Körper $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gilt: $$\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$$

Keine Ergebnisse anzugeben!

Aufgabe 7

a) Definieren Sie den Begriff “Lineare Unabhängigkeit”.

Keine Ergebnisse anzugeben!

b) Sei V ein reeller Vektorraum mit $dim(V) = n \geq 3$ und die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ linear unabhängig. Man finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass die Vektoren

$$v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + \lambda v_1$$

linear unabhängig sind.

Keine Ergebnisse anzugeben!

Aufgabe 8

a) Definieren Sie den Begriff "Gruppe". (Es reicht nicht aus, die einzelnen Eigenschaften nur zu benennen, sie sollen ausformuliert werden.)

Keine Ergebnisse anzugeben!

b) Wir betrachten die Menge aller bijektiven Abbildungen innerhalb einer Menge G, also

$$\tilde{G} := \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ bijektiv}\}$$

Wie lauten die Bedingungen, die eine Gruppe definieren (siehe (a)), konkret im Fall der Menge $\tilde{G}$ und der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Kandidat für eine Verknüpfung?

Keine Ergebnisse anzugeben!

c) Zeigen Sie: $\tilde{G}$ ist eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen.

Keine Ergebnisse anzugeben!